

2 - 1 . 1 軸荷重の分解 垂直応力とせん断応力

まず、応力の表記の仕方を記しておこう。 $i$  軸に垂直な面に作用し、 $j$  軸方向に作用する応力を

$\sigma_{ij}$  と書く。垂直応力に関しては、 $i = j$  であり、 $\sigma_{ii}$  を

$$\sigma_x = \sigma_{xx}, \quad \sigma_y = \sigma_{yy}, \quad \sigma_z = \sigma_{zz}$$

と簡略に表記することが多い。また、せん断応力に関しては、 $i \neq j$  であり、 $\sigma_{ij}$  を

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy})$$

のようにを用いることが多い。

右図のように、 $x$  軸にそって荷重  $P$  が作用している棒を考えると、 $x$  軸に垂直な断面 (A) に作用する垂直応力は以下で与えられることを学んだ。

$$\sigma_x = \sigma_{xx} = \frac{P}{A}$$

次に棒内において角度  $\theta$  だけ傾いた断面に働く応力を考える。またこの傾斜面の法線方向に  $x'$  軸、接線方向に  $y'$  軸をとる。傾斜面の面積は

$$A' = \frac{A}{\cos \theta}$$

であり、断面に垂直な力  $N$  と接線方向の力  $F$  は

$$N = P \cos \theta, \quad F = P \sin \theta$$

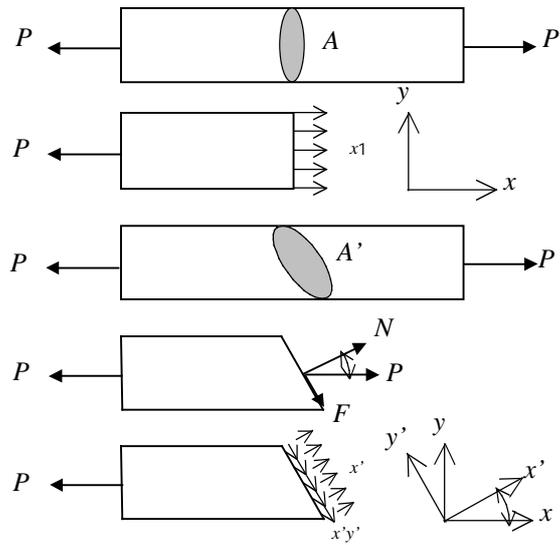
である。よって、斜面に働く垂直応力  $\sigma_{x'x'}$  は

$$\sigma_{x'x'} = \frac{N}{A'} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta$$

となり、せん断応力は

$$\sigma_{x'y'} = \frac{F}{A'} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \sigma_x \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

で表される。



例題) 半径 5 cm の丸棒があり、棒の軸方向に  $P = 50 \text{ kN}$  の引張荷重が負荷されている。棒内の面の法線が荷重軸と  $30^\circ$  の角度をなすとき、この面に作用する垂直応力  $\sigma_n$ 、せん断応力  $\tau_t$  を求めなさい。

【解】棒の軸に垂直な断面の面積を  $A$  とすると、 $A = \pi \times (0.05)^2 \text{ m}^2$  であり、この面に作用する垂直応力は

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{212000}{\pi \times (0.05)^2} = 27 \text{ MPa}$$

よって、軸と  $30^\circ$  の角度をなす斜面に作用する垂直応力  $\sigma_n$ 、せん断応力  $\tau_t$  は、

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 30^\circ = 27 \times \frac{3}{4} = 20.25 \text{ MPa}$$

$$\tau_t = \sigma \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 27 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 11.7 \text{ MPa}$$

となる。

さて、以上の記述は、材料力学で学んだ初歩的な応力の概念である。実際には、右図のように、物体には複数の集中荷重  $P_1, P_2, \dots$  や分布力  $w_1, w_2, \dots$  等が作用し、材料内の応力は空間的に変化していることが多いため、材料内の任意の点での応力状態を考えなければならない。

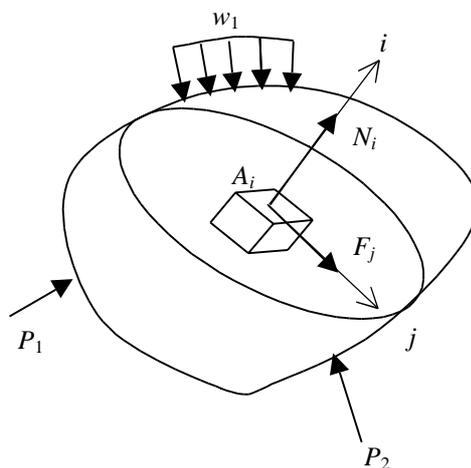
今、材料内の微小要素をとり、 $i$  軸に垂直な面の面積を  $A_i$ 、この面に作用する法線力を  $N_i$ 、 $j$  方向への接線力を  $F_j$  とすると、垂直応力とせん断応力は、それぞれ、

$$\sigma_{ii} = \frac{N_i}{A_i}, \quad \tau_{ij} = \frac{F_j}{A_i}$$

と表すことができる。着目している微小要素を無限に小さくしていくと、 $A_i \rightarrow 0$  であって、任意の点での応力は、上式より、

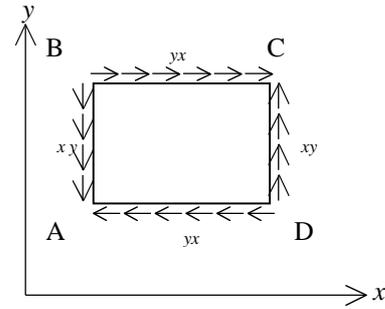
$$\sigma_{ii} = \lim_{A_i \rightarrow 0} \frac{N_i}{A_i}, \quad \tau_{ij} = \lim_{A_i \rightarrow 0} \frac{F_j}{A_i}$$

と定義される。



## 2 - 2 . せん断応力の共役性

右図のように  $xy$  平面内の微小要素 ABCD (長さ  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$ ) に関して、まず  $y$  軸に垂直な面 BC に  $x$  軸方向にせん断応力が働いている場合を考えてみる。面 BC は  $y$  軸に垂直であり、 $x$  軸に働く応力であることから、 $yx$  と表記される。力の釣り合いより、面 AD には逆向きのせん断応力が  $xy$  作用しなければならない。



一方、面 BC と面 AD に働くせん断応力  $yx$  だけでは、要素は時計方向に回転することになる。よって、 $x$  軸に垂直な面において  $y$  軸方向に作用する逆向きのせん断応力  $xy$  が必ず発生しなければならない。このとき、A 点周りのモーメントを考えると、それぞれ

$$\text{時計回りのモーメント： } M_1 = (yx dx dz) \times dy = yx dx dy dz$$

$$\text{反時計回りのモーメント： } M_2 = (xy dy dz) \times dx = xy dx dy dz$$

であって、モーメントのつりあいより、 $M_1 = M_2$  であるから、

$$yx = xy$$

となる。すなわち、微小要素のある面においてせん断応力を考えた場合、それとは直角な面において微小要素の回転を阻止するせん断応力が必ず発生する。これをせん断応力の共役性といい、互いを共役せん断応力という。

## 2 - 3 . 2次元の組み合わせ応力 (平面応力状態)

### 2—3—1 . 平面応力と平面ひずみ

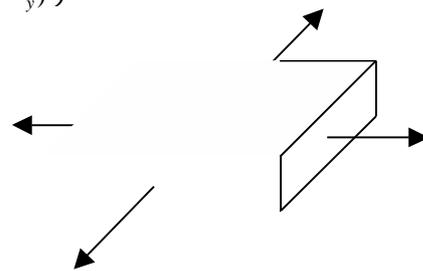
2次元の応力とひずみを考える場合、それらの状態には、 $z$  方向の応力を無視して良い場合と、 $z$  方向のひずみを無視して良い場合がある。すなわち、

$$1) \text{ 平面応力状態 ( } \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad \epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_x + \nu \sigma_y) \text{ )}$$

$$2) \text{ 平面ひずみ状態 ( } \epsilon_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \text{ )}$$

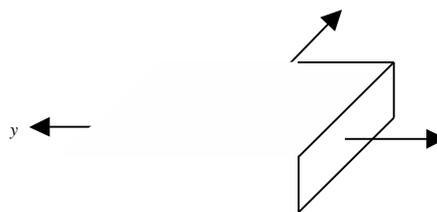
である。なお、平面応力状態におけるひずみ  $\epsilon_z$ 、平面ひずみ状態における応力  $\sigma_z$  は後に述べる一般化されたフックの法則より得られることがわかる。まず、平面応力と平面ひずみの違いについて考えてみよう。

右図のように、平板の面内に  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  の応力が作用している場合を考える。このとき、面の法線方向に



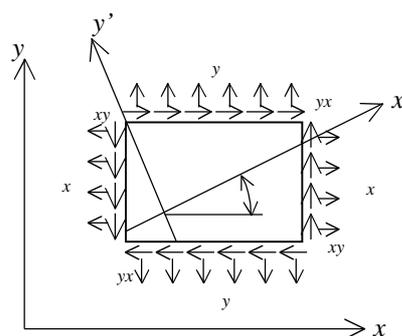
材料が自由に变形して良い場合には、 $z$  方向の拘束力が発生しない。従って、この場合には  $z$  方向の応力が 0 となる平面応力状態である。

次に、右図のように、2 個の变形・移動しない剛体のブロックに板が挟まれ、板の上面・底面がそれぞれブロックの表面に接着されたままの状態、板の面内に応力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  を付加することを考えよう。このとき、 $z$  方向の变形はない。しかし、变形が拘束されることによって  $z$  方向に拘束力が発生することになる。この場合が平面ひずみ状態である。



### 2—3—2 . 2次元における応力の座標変換

右図のように、 $xy$  座標軸において、垂直応力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  ならびにせん断応力  $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yx}$  が作用している長さ微小要素をとる。なお、 $z$  軸方向の微小要素の長さを  $dz$  とする。このとき、角度  $\theta$  だけ傾いた  $x'y'$  軸において働く垂直応力とせん断応力を求めよう。



(1) まず  $x'$  軸に垂直な断面に働く応力を求めよう。右図において、側面と底面に働く応力より、 $x$ 、 $y$  方向の力はそれぞれ

$$F_x = \sigma_x dy dz + \tau_{yx} dx dz$$

$$F_y = \tau_{xy} dy dz + \sigma_y dx dz$$

となる。一方、 $x'$  軸に垂直な斜面に働く応力より

$$F_x = \sigma_{x'} dy dz \cos \theta - \tau_{x'y'} dy dz \sin \theta$$

$$F_y = \tau_{x'y'} dy dz \sin \theta + \sigma_{y'} dy dz \cos \theta =$$

となる。これらより、

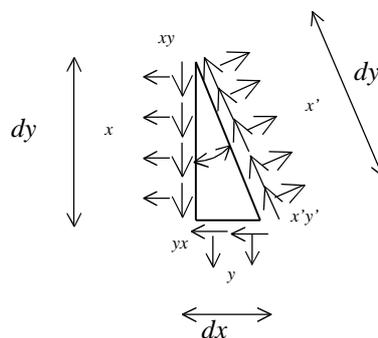
$$\sigma_x dy \cos \theta - \tau_{xy} dy \sin \theta = \sigma_{x'} dx + \tau_{x'y'} dy$$

$$\tau_{xy} dy \sin \theta + \sigma_y dy \cos \theta = \tau_{x'y'} dx + \sigma_{y'} dy$$

であるから、

$$\sigma_x = (\tau_{yx} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \frac{dx}{dy} + (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \frac{dy}{dy}$$

$$\tau_{xy} = (-\tau_{yx} \sin \theta + \sigma_y \cos \theta) \frac{dx}{dy} + (-\sigma_x \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta) \frac{dy}{dy}$$



を得る。ここで、

$$\frac{dx}{dy} = \sin \theta, \quad \frac{dy}{dx} = \cos \theta$$

であることから、

$$\begin{aligned} x &= (y_x \sin \theta \cos \theta + y_y \sin^2 \theta) + (x_x \cos^2 \theta + x_y \sin \theta \cos \theta) \\ &= y_y \sin^2 \theta + x_x \cos^2 \theta + 2 y_x \sin \theta \cos \theta \\ x_y &= (-y_x \sin^2 \theta + y_y \sin \theta \cos \theta) + (-x_x \sin \theta \cos \theta + x_y \cos^2 \theta) \\ &= -(x_x - y_y) \sin \theta \cos \theta + x_y (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

となる。2倍角の定理を用いると、

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_x + y_y}{2} + \frac{x_x - y_y}{2} \cos 2\theta + x_y \sin 2\theta \\ x_y &= -\frac{x_x - y_y}{2} \sin 2\theta + x_y \cos 2\theta \end{aligned}$$

(2) 次に  $y'$  軸に垂直な面に作用する応力を求めよう。  
右図において側面、底面に働く応力による  $x$ 、 $y$  方向の力はそれぞれ、

$$\begin{aligned} F_x &= -y_x dx dz + x_y dy dz \\ F_y &= y_y dx dz - x_y dy dz \end{aligned}$$

となる。一方、 $y'$  に垂直な斜面での応力より、

$$\begin{aligned} F_x &= y_y dx dz \sin \theta - y_x dx dz \cos \theta \\ F_y &= y_y dx dz \cos \theta + y_x dx dz \sin \theta \end{aligned}$$

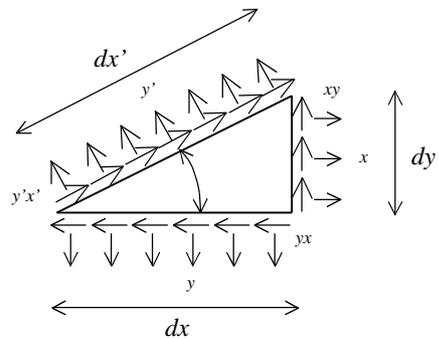
であるから、

$$\begin{aligned} y_y \sin \theta - y_x \cos \theta &= -y_x \frac{dx}{dy} + x_y \frac{dy}{dx} \\ y_y \cos \theta + y_x \sin \theta &= y_y \frac{dx}{dy} - x_y \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

を得る。これらより、

$$\begin{aligned} y_y &= (-y_x \sin \theta + y_y \cos \theta) \frac{dy}{dx} + (x_x \sin \theta - x_y \cos \theta) \frac{dy}{dx} \\ y_x &= (y_x \cos \theta + y_y \sin \theta) \frac{dx}{dy} - (x_x \cos \theta + x_y \sin \theta) \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

であり、



$$\frac{dx}{dx} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{dx} = \sin \theta$$

より、

$$\begin{aligned} \sigma_{y'} &= (-\sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta) + (\sigma_x \sin^2 \theta - \sigma_y \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta) \\ &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{x'} &= (\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta) - (\sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta) \\ &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

であり、2倍角の公式を用いると、

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

となる。

例題) 板面が  $xy$  軸に平行な平板の微小要素において、 $\sigma_x = 40 \text{ MPa}$ 、 $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ 、 $\tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$  の応力が作用している。 $xy$  軸を反時計まわりに  $45^\circ$  回転した  $x'y'$  軸において働く応力を求め、図に表しなさい。

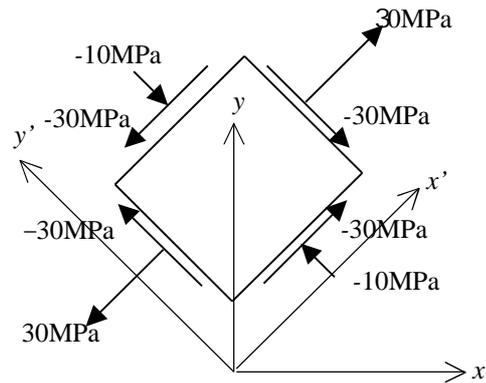
【解】  $\cos 2\theta = 0$ 、 $\sin 2\theta = 1$  なので、

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{xy} = \frac{40 - 20}{2} + 20 = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{xy} = \frac{40 - 20}{2} - 20 = -10 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = -\frac{40 + 20}{2} = -30 \text{ MPa}$$

となる。図による解は、右のようになる。



### 2—3—3 . 方向余弦による記述

微小要素に作用する2次元の応力状態を

$$= \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

と行列で表示しよう。これは、

$$= \begin{matrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{matrix} = ij$$

と書いても良い。ただし、座標軸は  $x=1, y=2$  である。

後に示すように、応力状態を表す行列は、方位ベクトルに作用して、応力ベクトルを作ることができる。このように、ベクトルに作用してベクトルを作る量をテンソルと言う。応力は2階のテンソルであり、添え字  $ij$  でその成分を表すことができる。また、等方性材料の場合には、 $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  あるいは

$\tau_{ij} = \tau_{ji}$  なので、転置行列

$$T = \begin{matrix} 11 & 21 \\ 12 & 22 \end{matrix} = \begin{matrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{matrix}$$

であることに注意しよう。

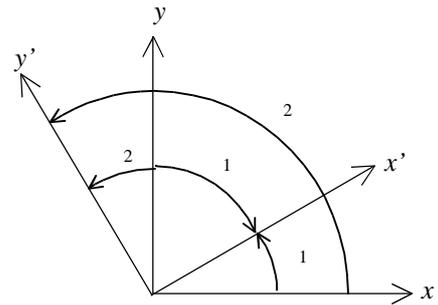
傾いた面に対して  $x'y'$ 座標を取ると、 $xy$  軸との関係は、右図に示す  $xy, x'y'$ 軸間の角度で表される方向余弦を用いて

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} \cos 1 & \cos 2 \\ \cos 2 & \cos 1 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \mathbf{a} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

あるいは

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} \cos 1 & \cos 2 \\ \cos 1 & \cos 2 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \mathbf{a}^T \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

で表される。ここで、 $\mathbf{a}$  は  $xy$  座標から  $x'y'$ 座標に変換する行列であり、 $\mathbf{a}^T$  は転置行列であって、 $x'y'$ 座標を  $xy$  座標に変換する。いずれの座標変換のマトリックスもベクトルに作用してベクトルを作ることから、2階のテンソル量である。



$x'$ に垂直な断面である斜面に働く応力を  $p$  とし、 $x, y$  成分をそれぞれ  $p_x, p_y$  とすると、

$$p_x A_x = \sigma_x A_x + \sigma_{yx} A_y$$

$$p_y A_x = \sigma_{xy} A_x + \sigma_y A_y$$

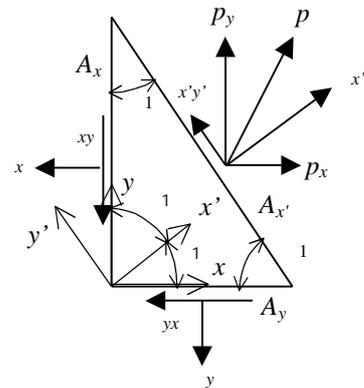
である。ここで、 $A_x, A_y$  はそれぞれ  $x, y$  軸に垂直な辺の面積であり、 $A_{x'}$  は  $x'$  軸に垂直な辺の面積である。

$$A_x = A_{x'} \cos 1, \quad A_y = A_{x'} \cos 1$$

より

$$\begin{matrix} p_x \\ p_y \end{matrix} = \begin{matrix} \sigma_x & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{matrix} \begin{matrix} \cos 1 \\ \cos 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \sigma_x & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{matrix} \begin{matrix} l_1 \\ m_1 \end{matrix} = T \begin{matrix} l_1 \\ m_1 \end{matrix}$$

である。これより、転置行列  $T$  は、 $x'$ の法線単位ベクトル



$n_x = (l_1, m_1)$  に作用して応力ベクトル  $p = (p_x, p_y)$  を作るこ

とがわかる。

一方、斜面の垂直応力  $p_x$ 、せん断応力  $p_y$  は、

$$\begin{aligned} p_x &= p_x \cos \theta_1 + p_y \cos \theta_1 = p_x l_1 + p_y m_1 \\ p_y &= p_x \cos \theta_2 + p_y \cos \theta_2 = p_x l_2 + p_y m_2 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

であることから、

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

となる。上式を実行すると、

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} l_1 l_1 + m_1 m_1 & l_1 m_1 + m_1 l_1 \\ l_2 l_1 + m_2 m_1 & l_2 m_1 + m_2 l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 l_1 + m_1 m_1 & l_1 m_1 + m_1 l_1 \\ l_2 l_1 + m_2 m_1 & l_2 m_1 + m_2 l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

を得る。ここで、 $p_{xy} = p_{yx}$  であるから、

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 l_1 + m_1 m_1 & 2l_1 m_1 \\ l_2 l_1 + m_2 m_1 & (m_2 l_1 + l_2 m_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

同様にして、 $y$  軸に垂直な斜面（面積  $A_y$ ）について考える。斜面に働く応力を  $q$  とすると、

$$\begin{aligned} q_x A_y &= -p_x A_x + p_y A_y \\ q_y A_y &= -p_y A_x + p_x A_y \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} A_x &= A_y \cos(\theta_1 - \theta_2) = -A_y \cos \theta_2 = -A_y l_2 \\ A_y &= A_y \cos \theta_2 = A_y m_2 \end{aligned}$$

であるから

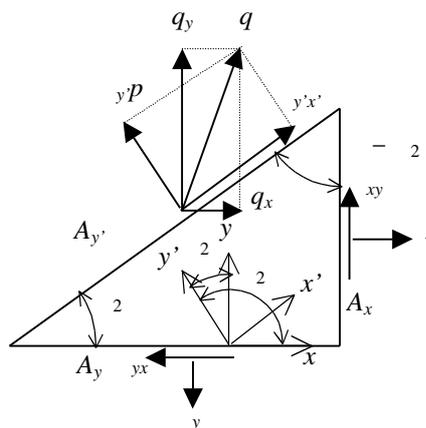
$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ p_y & p_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

である。これより、転置行列  $T$  は、 $y'$  の法線単位ベクトル  $n_y = (l_2, m_2)$  に作用して応力ベクトル  $q = (q_x, q_y)$

を作ることがわかる。一方、

$$\begin{aligned} p_y &= q_x \cos \theta_1 + q_y \cos \theta_1 = q_x l_1 + q_y m_1 \\ p_x &= q_x \cos \theta_2 + q_y \cos \theta_2 = q_x l_2 + q_y m_2 \end{aligned}$$

であることから、



$$\begin{matrix} yx \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ xy \end{matrix} \begin{matrix} yx \\ y \end{matrix} \begin{matrix} l_2 \\ m_2 \end{matrix}$$

となる。上式を実行すると、

$$\begin{matrix} yx \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} l_1 & x + m_1 \\ l_2 & x + m_2 \end{matrix} \begin{matrix} xy \\ xy \end{matrix} \begin{matrix} l_1 & yx + m_1 \\ l_2 & yx + m_2 \end{matrix} \begin{matrix} y \\ y \end{matrix} \begin{matrix} l_2 \\ m_2 \end{matrix} = \begin{matrix} l_1 l_2 & x + m_1 m_2 \\ l_2 l_2 & x + m_2 m_2 \end{matrix} \begin{matrix} y \\ y \end{matrix} \begin{matrix} + m_1 l_2 \\ + m_2 l_2 \end{matrix} \begin{matrix} xy \\ xy \end{matrix} \begin{matrix} + l_1 m_2 \\ + l_2 m_2 \end{matrix} \begin{matrix} yx \\ yx \end{matrix}$$

を得る。ここで、 $xy = yx$  であるから、

$$\begin{matrix} yx \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} m_1 l_2 & x + l_1 m_2 \\ l_2 l_2 & x + m_2 m_2 \end{matrix} \begin{matrix} y \\ y \end{matrix} \begin{matrix} + (l_1 l_2 + m_1 m_2) \\ + 2m_2 l_2 \end{matrix} \begin{matrix} xy \\ xy \end{matrix}$$

である。

以上の二つの結果を合わせると、

$$\begin{matrix} x & yx \\ xy & y \end{matrix} = \begin{matrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ xy \end{matrix} \begin{matrix} yx \\ y \end{matrix} \begin{matrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{matrix}$$

となる。すなわち、

$$T = a^T a^T$$

である。あるいは、

$$\begin{aligned} \begin{matrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ xy \end{matrix} \begin{matrix} xy \\ y \end{matrix} \begin{matrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{matrix} &= \begin{matrix} l_1 & x + l_2 \\ m_1 & x + m_2 \end{matrix} \begin{matrix} yx \\ yx \end{matrix} \begin{matrix} l_1 & yx + l_2 \\ m_1 & yx + m_2 \end{matrix} \begin{matrix} y \\ y \end{matrix} \begin{matrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} l_1 l_1 & x + l_2 \\ m_1 l_1 & x + m_2 \end{matrix} \begin{matrix} yx + l_2 \\ yx + m_2 \end{matrix} \begin{matrix} + l_2 l_1 (xy + yx) \\ + m_2 l_1 (xy + yx) \end{matrix} \begin{matrix} y \\ y \end{matrix} \begin{matrix} l_1 m_1 & x + l_2 m_2 \\ m_1 m_1 & x + m_2 m_2 \end{matrix} \begin{matrix} yx + l_2 \\ yx + m_2 \end{matrix} \begin{matrix} + l_1 m_2 \\ + m_2 m_1 \end{matrix} \begin{matrix} xy \\ xy \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} x & xy \\ yx & y \end{matrix} \end{aligned}$$

より、

$$= a^T a$$

を得る。特に、等方性材料の場合には  $T =$  であったから、

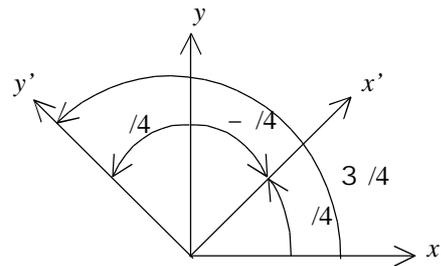
$$= a a^T = a^T a$$

となる。2次元で得られた上記の座標変換は、3次元の応力についても成り立つ。

例題) 面が  $xy$  軸に平行な平板の微小要素において、

$\sigma_x = 40 \text{ MPa}$ 、 $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ 、 $\tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$  の応力が作用している。 $xy$  軸を反時計まわりに  $45^\circ$  回転した  $x'y'$  軸において働く応力を求めなさい。

【解】右図に示すように、 $xy$  軸から反時計まわりに  $45^\circ$  だけ回転するから  $x'y'$  軸の方向余弦は



$$l_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m_1 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$l_2 = \cos -\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m_2 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。ここで、

$$a = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad a^T = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & xy \\ xy & y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & xy \\ xy & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x & xy \\ -1 & 1 & xy & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + xy & xy + y \\ -x + xy & -xy + y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + y + 2xy & -x + y \\ -x + y & x + y - 2xy \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x & xy \\ xy & y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 30 & -30 \\ -30 & -10 \end{pmatrix} \text{ MPa} \end{aligned}$$

を得る。この解は 2-3-2 節の例題の解と同じであることを注意しよう。

## 2 - 3-4 . 2次元での主応力

2 - 3-2 より、2次元での応力状態について

$$x = \frac{x^+ + y^-}{2} + \frac{x^- - y^+}{2} \cos 2\theta + xy \sin 2\theta$$

$$y = \frac{x^+ + y^-}{2} - \frac{x^- - y^+}{2} \cos 2\theta - xy \sin 2\theta$$

$$y_x = x_y = -\frac{x^- - y^+}{2} \sin 2\theta + xy \cos 2\theta$$

を得た。3番目の式において  $y_x = x_y = 0$  となる角度を選ぶことができる。すなわち、

$$\tan 2\theta_n = \frac{2xy}{x^- - y^+}$$

である。あるいは、

$$\cos 2_n = \pm \frac{\frac{x-y}{2}}{\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}}, \quad \sin 2_n = \pm \frac{xy}{\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}}$$

である。これより、

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{\frac{x-y}{2}}{\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}} + \frac{xy}{\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}} = \frac{x+y}{2} + \sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}$$

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{\frac{x-y}{2}}{\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}} - \frac{xy}{\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}} = \frac{x+y}{2} - \sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}$$

このように、せん断応力が0となる面のことを主応力面 (principal stress plane) と言い、そこに働く垂直応力は最大、最小となり、これらを主応力 (principal stress) という。また、主応力の働いていく方向を主軸 (principal axis) という。主応力は大きい順から  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  と表記する。すなわち、

$$\sigma_1 = \max = \frac{x+y}{2} + \sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}$$

$$\sigma_2 = \min = \frac{x+y}{2} - \sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + xy^2}$$

である。上のように定めた主応力が最大あるいは最小の垂直応力となっているのは、

$$-\frac{x}{2} = -\frac{x-y}{2} \sin 2_n + xy \cos 2_n = 0$$

を満たすことから、容易にわかる。また、垂直応力あるいは主応力の合算は、

$$\sigma_1 + \sigma_2 = x + y$$

であり、考える面の角度に依存しない不変的な量である。これを応力の不変量 (invariant) と言う。

次に、せん断応力が最大になる面、すなわち、主せん断応力面を探そう。

$$\tau_{xy} = -\frac{x-y}{2} \sin 2_n + xy \cos 2_n$$

を  $2_n$  で微分すると

$$-\frac{xy}{2} = -2 \frac{x-y}{2} \cos 2_n + xy \sin 2_n = 0$$

より、

$$\tan 2 \tau_t = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \tau_{xy}}$$

のときが最大となる。これより、垂直応力に対しては

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

を得る。また、

$$\cos 2 \tau_t = \pm \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}}, \quad \sin 2 \tau_t = \mp \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}}$$

の  $2 \tau_t$  が  $90^\circ$  異なった二つのケースが考えられ、それぞれに対して

$$\max = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}, \quad \min = -\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

の最大、最小のせん断応力を得る。  $\tau_1$  と表記して、これを主せん断応力 (principal shear stress) と言う。

また、

$$\tan 2 \tau_n \tan 2 \tau_t = -1$$

であるから、

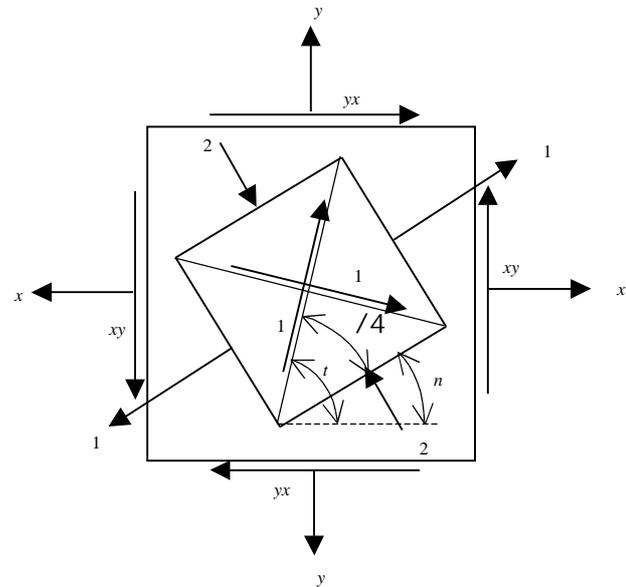
$$2 \tau_n \pm 2 \tau_t = \frac{\pi}{2}, \quad \tau_n \pm \tau_t = \frac{\pi}{4}$$

より、主せん断応力面は主応力面から  $\pm 45^\circ$  離れた角度に位置する (右図参照)。

さらには、主応力と主せん断応力の間には

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

の関係がある。



例題) 板面が  $xy$  軸に平行な平板の微小要素において、  $\sigma_x = 40 \text{ MPa}$ 、  $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ 、  $\tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$  の応力が作用している。主応力、主せん断応力ならびにそれらの軸と  $xy$  軸の幾何学的関係を求めなさい。

【解】主応力はそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40-20}{2} + \sqrt{\left(\frac{40-20}{2}\right)^2 + 20^2} = 46.1 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40-20}{2} - \sqrt{\left(\frac{40-20}{2}\right)^2 + 20^2} = -26.1 \text{ MPa} \end{aligned}$$

となる。主軸と  $x$  軸のなす角度は、

$$\tan 2\theta_n = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 20}{40 + 20} = \frac{2}{3}$$

より、

$$\theta_n = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2}{3} = 0.492 \text{ rad} = 28.2^\circ$$

となる。また、主せん断応力は、

$$\tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{40+20}{2}\right)^2 + 20^2} = 36.1 \text{ MPa}$$

となり、主せん断応力が作用する面は主軸 1 から  $\pm 45^\circ$  だけ傾斜している 2 面である（図は、前ページの図において、 $\theta_n = 28.2^\circ$  となるように描けばよいので省略する）。

#### 2—3—4 . モールの円 (Mohr's circle)

主応力、主せん断応力を上記のように計算によって求めても良いが、作図法により視覚的に求められる。座標変換で得られる応力より、

$$\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

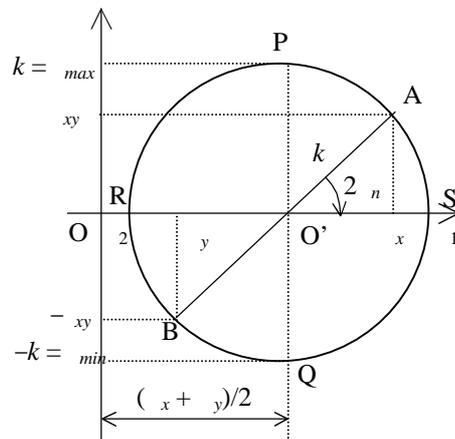
$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

であり、これらを自乗して足し合わせると、以後の簡単のため、 $\sigma_x = x$ 、 $\tau_{xy} = y$  と書き直して、

$$-\frac{x + y}{2} + 2 = \frac{x - y}{2} + y^2$$

を得る。右図のように、 $\sigma$  を横軸に、 $\tau$  を縦軸にとると、これは、半径

$$k = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



で、中心が

$$\frac{x+y}{2}, 0$$

の円を表す。これをモールの円と言う。モールの円において

$$\text{点 A : } (x, xy)$$

$$\text{点 B : } (x, -xy)$$

であることは後に証明される。また、モールの円において、点 S、点 R の座標の成分は

$$\text{点 S : } \sigma_1 = \frac{x+y}{2} + k = \frac{x+y}{2} + \sqrt{\frac{x-y}{2}^2 + xy^2}$$

$$\text{点 R : } \sigma_2 = \frac{x+y}{2} - k = \frac{x+y}{2} - \sqrt{\frac{x-y}{2}^2 + xy^2}$$

となつて、主応力を表すことがわかる。点 P、点 Q の座標の成分は、

$$\text{点 S : } \tau_{\max} = \tau = k$$

$$\text{点 R : } \tau_{\min} = -\tau = -k$$

であり、主せん断応力となることがわかる。

モールの円上の点 A が、応力状態  $\sigma_x, \tau_{xy}$  を表すことは、以下のようにしてわかる。モールの円から円の中心 O' と点 A と結ぶ辺を斜辺とする直角三角形 O'AA' を考える。O'AA' の底辺の長さを、

$$O'A = \frac{x-y}{2}$$

であり、高さを

$$AA' = xy$$

とすると、簡単な幾何学的考察 ( $O'A^2 = OA'^2 + AA'^2$ ) から

$$k = \sqrt{\frac{x-y}{2}^2 + xy^2} = \tau = \frac{x+y}{2}$$

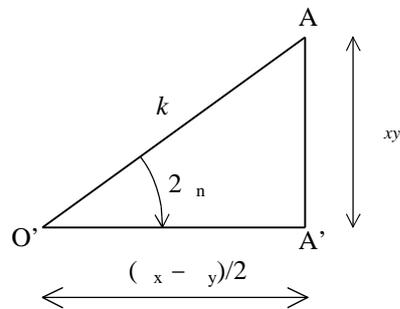
であることがわかる。また、モールの円において、

$$OA = OO' + O'A = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x$$

であることから、点 A' は  $\sigma_x$  を表すことが容易にわかる。ここで、さらに、

$$k = OA \sin 2\theta_n = O'A \cos 2\theta_n + AA' \sin 2\theta_n = \frac{x-y}{2} \cos 2\theta_n + xy \sin 2\theta_n$$

であることから



$$\frac{x^+ - y^-}{2} = \frac{x^- - y^+}{2} \cos 2n + xy \sin 2n$$

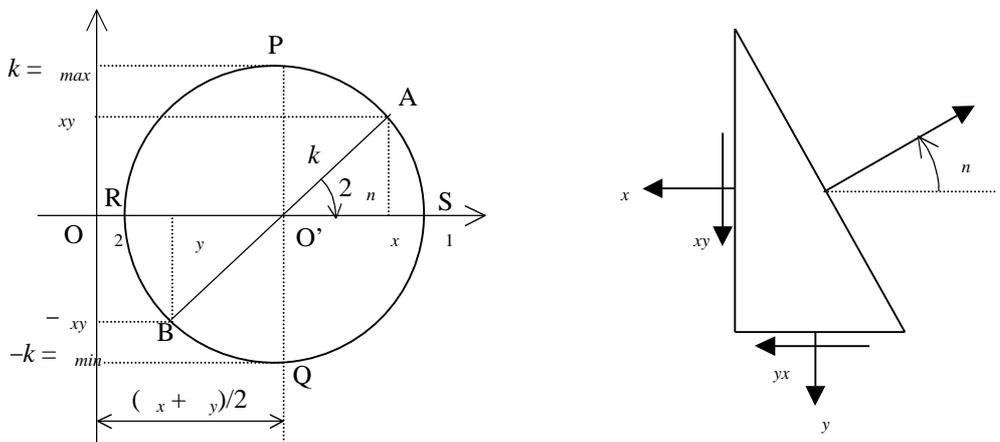
となって座標変換の式と一致する。よって、 $n$  は  $x$  軸と主軸のなす角度であることがわかる。同様の考察をモールの円において点 A とは反対称の位置にある点 B について行うことができる。よって、モールの円において点 A、点 B の座標は

$$\text{点 A : } (x, xy)$$

$$\text{点 B : } (y, -xy)$$

となることが確かめられた。

最後に、モールの円（下左図）で表される角度と、実際の材料中（下右図）の角度の関係を考えよう。下左図で、モールの円上の点 A は、 $x$  軸に垂直な面に働く垂直応力  $x$ 、せん断応力  $xy$  を表し、 $x$  軸から「時計まわり」に  $2n$  の角度に主軸にあることを示している。一方、下右図の実空間では、 $x$  軸から「反時計まわり」に  $n$  の角度に主軸がある。すなわち、実空間において、 $xy$  軸から「反時計まわり」に角度  $q$  となる  $x'y'$  軸の応力状態を求めたい場合には、モールの円においては点 A から「時計まわり」に角度  $2q$  となる点を求めなければならない。



例題)  $x = 150 \text{ MPa}$ 、 $y = -50 \text{ MPa}$ 、 $xy = -50 \text{ MPa}$  であるとき、以下の各問いに答えなさい。

- (1) 主応力、主せん断応力を求めなさい。主軸と  $x$  軸との角度  $n$  を求めなさい。
- (2)  $xy$  軸から反時計まわりに  $52.5^\circ$  傾けて  $x'y'$  軸を取るとき、 $x'$ 、 $y'$ 、 $x'y'$  を求めなさい。

【解】(1)

$$\frac{x^+ + y^-}{2} = 50 \text{ MPa}$$

$$k = \sqrt{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{12500} = 111.8 \text{ MPa}$$

であるから、モールの円を描くと、右図のようになる。これより、主応力は、

$$\sigma_1 = 161.8 \text{ MPa}、\quad \sigma_2 = -61.8 \text{ MPa}$$

せん断応力は

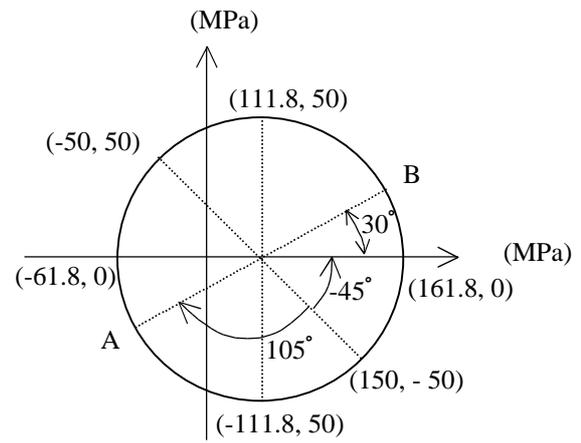
$$\tau_1 = 111.8 \text{ MPa}$$

であり、角度を時計まわりに正にとると、 $2\theta_n = -45^\circ$  であるから、 $\theta_n = -22.5^\circ$  となる。すなわち、 $\sigma_1$  の主軸は  $x$  軸から時計まわりに  $22.5^\circ$  傾斜している。

(2) 実空間における  $52.5^\circ$  反時計まわりは、モールの円では  $105^\circ$  時計まわりして至る点 A が  $x$  軸に垂直な断面に働く応力状態を表すことになる。点 B は  $y$  軸に垂直な断面に働く応力状態である。よって、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 50 - 111.8 \cos 3\theta = 46.8 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 50 + 111.8 \cos 3\theta = 146.8 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= -111.8 \sin 30^\circ = -55.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

となる。



## 2 - 4 . 3次元への拡張

### 2 - 4 - 1 . 任意の面、方向における応力

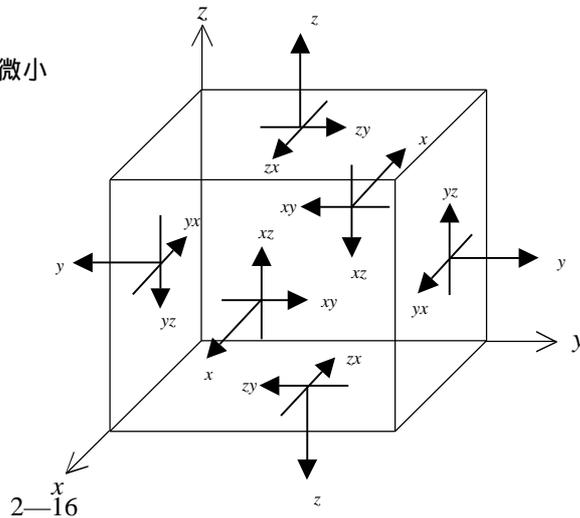
右図のように、 $xyz$  座標において指定される微小要素  $dx dy dz$  に作用する応力を

$$\begin{array}{cccccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} & 11 & 12 & 13 \\ = & \tau_{yx} & \tau_{yz} & 21 & 22 & 23 \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z & 31 & 32 & 33 \end{array}$$

と表わすことにする。ただし、

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad i, j = x, y, z$$

である。



次に、 $x'$ 軸が法線となるような斜面に作用する応力を  $p$  とし、その成分を  $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$  とすると、以下の式が成り立つ。

$$p_x A = x A_x + y_x A_y + z_x A_z$$

$$p_y A = x_y A_x + y A_y + z_y A_z$$

$$p_z A = z_x A_x + z_y A_y + z A_z$$

より、

$$p_x = x l_1 + y_x m_1 + z_x n_1$$

$$p_y = x_y l_1 + y m_1 + z_y n_1$$

$$p_z = z_x l_1 + z_y m_1 + z n_1$$

である。よって

$$\begin{aligned} x &= p_x l_1 + p_y m_1 + p_z n_1 \\ &= x l_1^2 + y m_1^2 + z n_1^2 + 2 x_y l_1 m_1 + 2 y_z m_1 n_1 + 2 z_x n_1 l_1 \end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned} y_x &= p_x l_2 + p_y m_2 + p_z n_2 \\ &= x l_1 l_2 + y m_1 m_2 + z n_1 n_2 \\ &\quad + x_y (l_1 m_2 + l_2 m_1) + y_z (m_1 n_2 + m_2 n_1) + z_x (n_1 l_2 + n_2 l_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_x &= p_x l_3 + p_y m_3 + p_z n_3 \\ &= x l_1 l_3 + y m_1 m_3 + z n_1 n_3 \\ &\quad + x_y (l_1 m_3 + l_3 m_1) + y_z (m_1 n_3 + m_3 n_1) + z_x (n_1 l_3 + n_3 l_1) \end{aligned}$$

である。他の応力成分についても、同様に計算していけばいいが、得られる結果は長くて煩わしい。

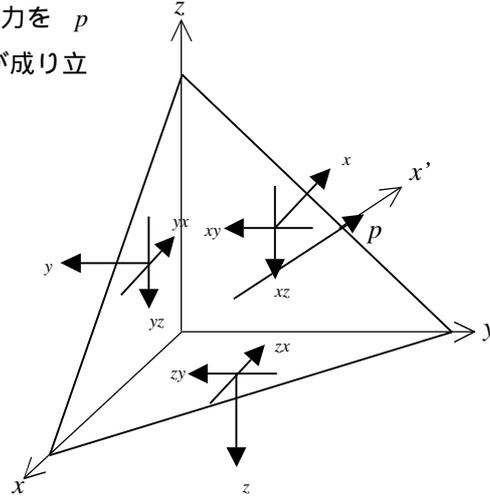
そこで、 $xyz$  座標から  $x'y'z'$  座標への座標変換行列について、

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

と定義し直すと、例えば、

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i,j=1}^3 a_{1i} a_{ij} x_j \\ &= a_{11} a_{11} x_{11} + a_{11} a_{12} x_{12} + a_{11} a_{13} x_{13} + a_{12} a_{11} x_{21} + a_{12} a_{12} x_{22} + a_{12} a_{13} x_{23} \\ &\quad + a_{13} a_{11} x_{31} + a_{13} a_{12} x_{32} + a_{13} a_{13} x_{33} \end{aligned}$$

で与えられる。同様にして、他の応力成分についても、



$$k l = \sum_{i,j=1}^3 a_{ki} a_{lj} \quad ij$$

で簡単に表される。あるいは、さらに間略して、上記の総和は

$$k l = a_{ki} a_{lj} \quad ij$$

と表記される（総和規則）。この結論は、2次元の場合に得られたテンソルを用いた座標変換を、3次元に拡張した

$$= \mathbf{a}^T \mathbf{a}$$

の成分表記である。

## 2 - 4 - 2 . 主応力、主せん断応力

ある面において、垂直応力のみが作用している場合を考える。その面において  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向に働く応力はそれぞれ、

$$T_x = l$$

$$T_y = m$$

$$T_z = n$$

である。ここで、 $l$ 、 $m$ 、 $n$  は面の法線方向余弦であり、法線と  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸のなす角をそれぞれ、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  とすると、

$$l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \gamma$$

で表される。また、射影面積は

$$A_x = Al, \quad A_y = Am, \quad A_z = An$$

となる。各射影面において、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸方向に働く力の合力は

$$T_x A = lA = x A_x + y A_y + z A_z = (x l + y m + z n) A$$

$$T_y A = mA = x A_x + y A_y + z A_z = (x l + y m + z n) A$$

$$T_z A = nA = x A_x + y A_y + z A_z = (x l + y m + z n) A$$

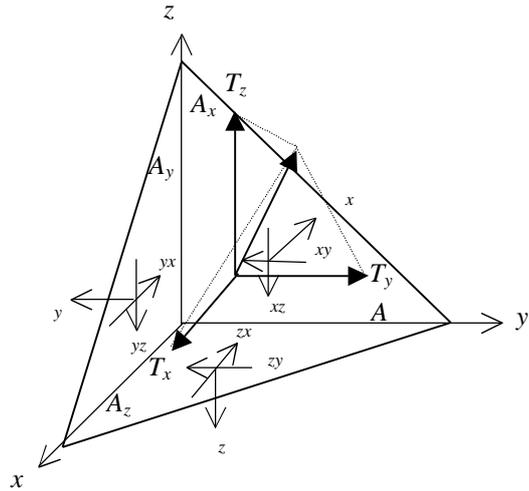
である。よって、以下の式が成り立つ。

$$(x - l)l - y m - z n = 0$$

$$- x y l + (y - m)m - z n = 0$$

$$- x z l - y m + (z - n)n = 0$$

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$  より、 $l = m = n = 0$  はありえないので、そのような解を得るためには、



$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -x & -xy & -zx \\ -xy & -y & -yz \\ -zx & -yz & -z \end{vmatrix} \\
&= (-x)(-y)(-z) - 2xyyzxz - yz^2(-x) - zx^2(-y) - xy^2(-z) \\
&= \{ -^2 - (x+y+z) + x^2y^2 \} (-z) + 2xyyzxz - (xy^2 + yz^2 + zx^2) + x^2yz^2 + y^2zx^2 + z^2xy^2 \\
&= -^3 - (x+y+z)^2 + (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - xy^2 - yz^2 - zx^2) \\
&= -x^2y^2z - 2xyyzxz + x^2yz^2 + y^2zx^2 + z^2xy^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立たねばならない。よって、主応力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  は以下の3次方程式を解くことで得られる。

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 - J_2 \sigma - J_3 = 0$$

ここで、

$$J_1 = x + y + z$$

$$J_2 = -(x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2)$$

$$J_3 = x^2y^2z + 2xyyzxz - x^2yz^2 - y^2zx^2 - z^2xy^2$$

をそれぞれ、応力の第1、第2、第3の不変量という。なお、主応力は  $\sigma_1$   $\sigma_2$   $\sigma_3$  の順に大きさを決めるのが一般的である。

逆に、主応力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  が与えられると、

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned}
& (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \\
&= \sigma^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \sigma^2 + (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \sigma - \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

より、

$$J_1 = x + y + z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= -(x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2) \\
&= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= x^2y^2z + 2xyyzxz - x^2yz^2 - y^2zx^2 - z^2xy^2 \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3
\end{aligned}$$

となる。

ここで、後に述べられるように、1番目の不変量  $J_1$  は、静水圧的な応力に関する項である。さらに、2番目の不変量  $J_2$  は、せん断変形に要するエネルギーと関連付けられ、後述する降伏条件と密接に関わってくる。

主せん断応力は、

$$\tau_1 = \frac{|1-3|}{2}, \quad \tau_2 = \frac{|1-2|}{2}, \quad \tau_3 = \frac{|2-3|}{2}$$

である。ただし、 $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  であるように選ぶ。これより、

$$\begin{aligned} & 4\tau_1^2 + 4\tau_2^2 + 4\tau_3^2 \\ &= (\tau_1 - \tau_2)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2 + (\tau_3 - \tau_1)^2 \\ &= 2\tau_1^2 + 2\tau_2^2 + 2\tau_3^2 - 4\tau_1\tau_2 - 4\tau_2\tau_3 - 4\tau_3\tau_1 \end{aligned}$$

を得る。一方、

$$\begin{aligned} & (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)^2 \\ &= \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 + 2\tau_1\tau_2 + 2\tau_2\tau_3 + 2\tau_3\tau_1 \end{aligned}$$

であるから、2番目の不変量は

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6} \{ (\tau_1 - \tau_2)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2 + (\tau_3 - \tau_1)^2 - 2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)^2 \} \\ &= \frac{1}{3} \{ 2\tau_1^2 + 2\tau_2^2 + 2\tau_3^2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)^2 \} \end{aligned}$$

となる。

例題)  $\sigma_x = 20 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_z = 0 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{xy} = 0 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{yz} = 10 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{zx} = 10 \text{ MPa}$  のとき、主応力と主せん断応力を求めなさい。

【解】 応力の不変量は

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 20 - 20 + 0 = 0 \text{ MPa} \\ J_2 &= \frac{1}{6} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - 3\sigma_{xy}^2 - 3\sigma_{yz}^2 - 3\sigma_{zx}^2) = \frac{1}{6} (-400 + 0 + 0 - 0 - 100 - 100) = -600 \text{ MPa}^2 \\ J_3 &= \frac{1}{6} (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} - \sigma_x^2\sigma_{yz}^2 - \sigma_y^2\sigma_{zx}^2 - \sigma_z^2\sigma_{xy}^2) = \frac{1}{6} (0 + 2 \times 0 - 2000 + 2000 - 0) = 0 \text{ MPa}^3 \end{aligned}$$

となるから、

$$\lambda^3 - 600 = (\lambda^2 - 600)(\lambda - (-\sqrt{600}))(\lambda + \sqrt{600}) = 0$$

をえる。よって、主応力は

$$\sigma_1 = \sqrt{600} = 24.5 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -\sqrt{600} = -24.5 \text{ MPa}$$

となり、主せん断応力は

$$\tau_1 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = 24.5 \text{ MPa}, \quad \tau_2 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = 12.25 \text{ MPa}, \quad \tau_3 = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} = 12.25 \text{ MPa}$$

となる。

## 2—5 . ひずみとフックの法則

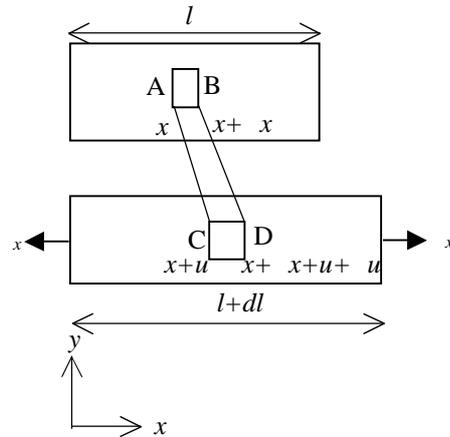
2 - 5 - 1 . 垂直ひずみ

長さ  $l$  の棒の軸方向 ( $x$  軸) に応力  $\sigma_x$  を付加した時、この方向に伸びあるいは縮みとなる変位を  $dl$  とすると、巨視的な垂直ひずみは、

$$\epsilon_x = \frac{dl}{l}$$

で与えられることを学習した。

ここでは、右図のように材料内の微小要素 AB の変形を考えると、



応力  $\sigma_x$  を付加する前：

点 A の位置 =  $x$

点 B の位置 =  $x + l$

応力  $\sigma_x$  を付加した後：

点 A は変位  $u$  だけ移動して位置 C ( $x + u$ ) となる。

点 B の変位  $u + du$  だけ移動して位置 D ( $x + l + u + du$ ) となる。

従って、微小要素 CD のひずみは、

$$\epsilon_x = \frac{CD - AB}{AB} = \frac{\{(x + l + u + du) - (x + u)\} - \{(x + l) - x\}}{(x + l) - x} = \frac{du}{l}$$

である。微小要素の大きさを無限小に小さくしていくと、点 C のひずみを表すことができる。すなわち、点 C のひずみは、

$$\epsilon_x = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{du}{l} = \frac{du}{dx}$$

である。これを縦ひずみという。一方、荷重軸と垂直な  $y$ 、 $z$  軸に対しては、

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$

のひずみが生じる。ここで、 $\nu$  はポアソン比であり、金属・セラミック材料で、 $\nu \approx 0.3$  である。このように、荷重軸と垂直な方向に生じるひずみを横ひずみと言う。

同様に、 $y$  方向に応力  $\sigma_y$  が作用するとき生じる  $y$  方向の変位を  $v$  とすると、 $y$  方向の垂直ひずみは、

$$\epsilon_y = \frac{dv}{dy}$$

であり、 $x$ 、 $z$  方向には

$$\epsilon_x = \epsilon_z = -\nu \epsilon_y$$

の横ひずみが生じる。

また、 $z$  方向に働く応力  $\sigma_z$  により生じる  $z$  方向の変位を  $w$  とすると、

$$\epsilon_z = \frac{w}{z}$$

であり、 $x$ 、 $y$  方向には

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z$$

の横ひずみが生じる。

## 2 - 5 - 2 . 垂直応力と垂直ひずみに関するフックの関係

右図のように、微小要素に垂直応力  $\sigma_x$  が作用するとき、フックの法則より

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

であり、 $x$  軸方向の縦ひずみ、ならびに  $y$ 、 $z$  軸方向の横ひずみは

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

となる。

同様にして、微小要素に垂直応力  $\sigma_y$  が作用するとき、縦ひずみ、横ひずみは

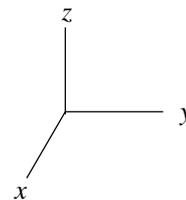
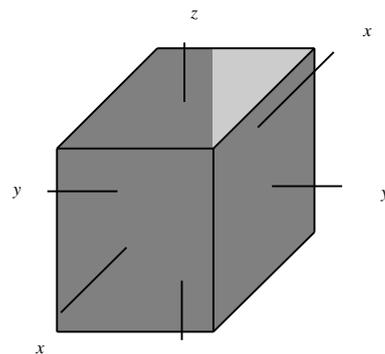
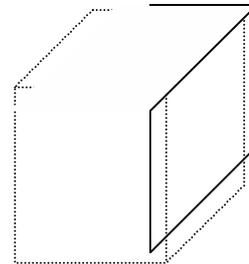
$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \epsilon_x = \epsilon_z = -\nu \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

である。最後に、微小要素に垂直応力  $\sigma_z$  が作用するとき、縦ひずみ、横ひずみは

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

である。

以上より、右図のように、微小要素に  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  が同時に作用するとき、ひずみはそれぞれの応力によって生じる縦ひずみと横ひずみを足し合わせとなり、垂直応力と垂直ひずみに関する以下の一般化されたフックの法則をえる。



$$x = \frac{1}{E} [x - (y + z)]$$

$$y = \frac{1}{E} [y - (z + x)]$$

$$z = \frac{1}{E} [z - (x + y)]$$

次に、応力をひずみで表してみよう。上の3式を足し合わせると、

$$x + y + z = \frac{1-2}{E} (x + y + z)$$

より、

$$y + z = -x + \frac{E}{1-2} (x + y + z)$$

であるから、

$$x = \frac{1}{E} x - -x + \frac{E}{1-2} (x + y + z) = \frac{1+}{E} x - \frac{E}{1-2} (x + y + z)$$

より、

$$x = \frac{E}{1+} x + \frac{E}{(1+)(1-2)} (x + y + z) = \frac{(1- )E}{(1+ )(1-2 )} x + \frac{E}{(1+ )(1-2 )} (y + z)$$

ここで、

$$= \frac{E}{(1+ )(1-2 )}、 \mu = \frac{E}{2(1+ )}$$

で定義されるラーメの定数を導入すると、他の成分についても同様にして、以下の垂直応力と垂直ひずみに関する一般化されたフックの法則が得られる。

$$x = ( + 2\mu) x + y + z$$

$$y = x + ( + 2\mu) y + z$$

$$z = x + y + ( + 2\mu) z$$

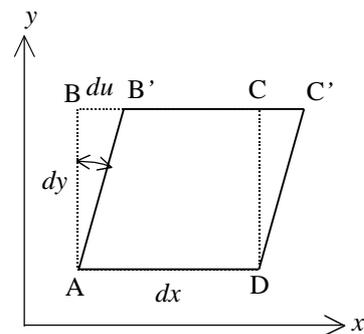
### 2 - 5 — 3 . せん断ひずみ

#### ( 1 ) 純粋せん断ひずみ

右図のように、一様にせん断変形が生じた場合、これを純粋せん断と言い、せん断ひずみは

$$\gamma_{yx} = \frac{BB'}{AB} = \frac{du}{dy}$$

で与えられる。また、



$$\gamma_{xy} =$$

とおくと、

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} = \tan$$

で表される。弾性変形によるひずみは非常に小さいので、 $\tan$  としてよい。よって、

$$\gamma_{xy}$$

と表すこともできる。

## (2) せん断ひずみ

右図のように、微小要素 ABCD がせん断変形して、AB'C'D' となる場合を考える。せん断応力の共役性からしてこのような形になるのが当然である。このとき、せん断ひずみは、その定義より

$$\gamma_{xy} = \frac{AH}{BH}$$

となる。ここで、

$$\angle BAD = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2), \quad \angle ABH = \alpha_1 + \alpha_2$$

であるから、

$$AH = BH \tan(\alpha_1 + \alpha_2)$$

より、

$$\gamma_{xy} = \tan(\alpha_1 + \alpha_2)$$

となる。変形量が非常に小さい弾性変形では、

$$\gamma_{xy} = \tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{1 - \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \approx \tan \alpha_1 + \tan \alpha_2$$

としてよい。ここで、

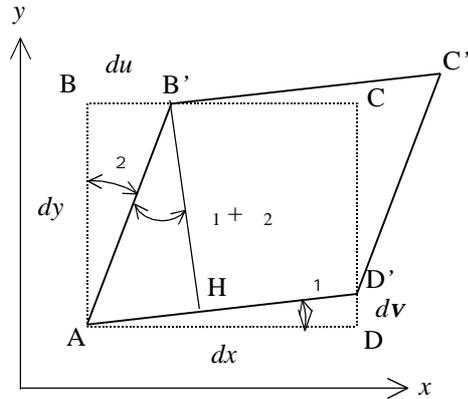
$$\tan \alpha_1 = \frac{v}{x}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{u}{y}$$

だから、

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{v}{x} + \frac{u}{y}$$

と表すことができる。同様にして、 $z$  方向のせん断変位を  $w$  とすると

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{w}{y} + \frac{v}{z}$$



$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{w}{x} + \frac{u}{z}$$

を得る。

#### 2—5—4 . せん断ひずみと剛体回転

2—5—3 節では無視したが、厳密には、微小要素のせん断変形は、回転を伴う。材料の変形を扱う場合には形状の変化と共に、材料中の回転に起因する変形も考慮にいれる必要がある。

右図の場合、紙面に垂直な  $z$  軸に関して、時計回りの回転角は  $\theta_2$ 、反時計回りの回転角は  $\theta_1$  であるので、反時計回りに取った相対的な回転角を  $2\theta_z$  とすると、

$$2\theta_z = \theta_1 - \theta_2$$

で与えられる。ここで、

$$\theta_1 \tan \theta_1 = \frac{v}{x}, \quad \theta_2 \tan \theta_2 = \frac{u}{y}$$

のときには、

$$2\theta_z = \frac{v}{x} - \frac{u}{y}$$

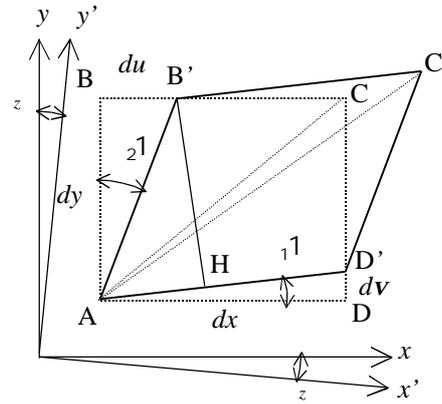
で与えられる。

同様にして、 $z$  方向のせん断変位を  $w$  とすると

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \frac{v}{z} + \frac{w}{y}, \quad \theta_x = \frac{v}{z} - \frac{w}{y}$$

$$\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} = \frac{w}{x} + \frac{u}{z}, \quad \theta_y = \frac{u}{z} - \frac{w}{x}$$

を得る。 $\theta_x$ 、 $\theta_y$ 、 $\theta_z$  のことを、要素の形状変化を伴わない回転をあらわすので、剛体回転という。ひずみが非常に小さい金属やセラミックの弾性変形の場合には、 $\theta_x$ 、 $\theta_y$ 、 $\theta_z$  の剛体回転は無視して良いが、変形量が多い金属の塑性変形では材料の要素は移動と回転を伴うことを無視できなくなってくる。



#### 2 - 5—5 . せん断変形におけるフックの法則

せん断応力とせん断ひずみに関するフックの法則は、

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

で表される。

ここでは、横弾性係数（あるいは剛性率） $G$  をヤング率  $E$  とポアソン比  $\nu$  を用いて表すことを考える。右図のように、 $x$  軸方向に引張応力  $\sigma_x$  が作用すると、 $xy$  軸と  $45^\circ$  傾いた辺をもつ微小要素  $ABCD$  に作用するせん断応力は

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\sigma_x}{2}$$

である。

次に、次にひずみについて考える。右図のように、変形前と変形後の微小要素の縦・横ひずみとせん断ひずみの幾何学的関係を見やすくするため、 $A$  点と  $A'$  点を重ねることとする。微小要素  $ABCD$  は変形後には  $A'B'C'D'$  となり、 $x$  方向の伸び変位  $du$  は、

$$du = A'C' - AC$$

で与えられる。よって縦ひずみは

$$\epsilon_x = \frac{A'C' - AC}{AC}$$

であるから、

$$A'C' = AC(1 + \epsilon_x)$$

となる。一方、横ひずみは

$$\epsilon_y = -\epsilon_x = \frac{B'D' - BD}{BD}$$

であるから、

$$B'D' = BD(1 - \epsilon_x)$$

である。すると、変形前後の要素の幾何学的関係から、以下の2式をえる。

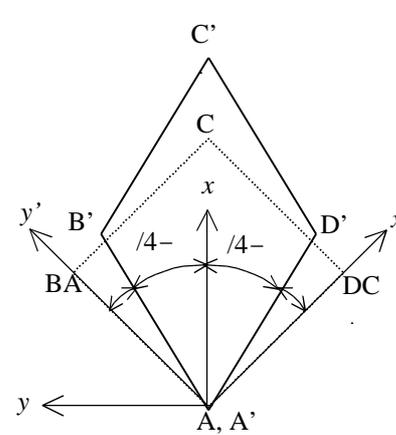
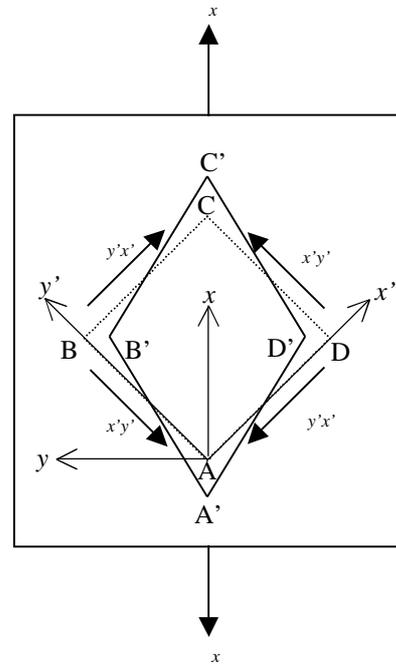
$$AC = 2AB \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} AB (\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} AB \cos \frac{\pi}{4} (1 + \tan \frac{\pi}{4})$$

$$B'D' = 2AB \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} AB (\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} AB \cos \frac{\pi}{4} (1 - \tan \frac{\pi}{4})$$

ここで、弾性変形ではひずみは非常に小さく、

$$\epsilon_x = \tan 2\theta - 2\tan \theta$$

であるので、



$$AC = \sqrt{2} AB \cos \left(1 + \frac{xy}{2}\right), \quad BD = \sqrt{2} AB \cos \left(1 - \frac{xy}{2}\right)$$

であり、これらの結果より

$$\frac{AC}{BD} = \frac{2 + \frac{xy}{2}}{2 - \frac{xy}{2}} = \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}$$

を得る。これより、ひずみが非常に小さいことから、2次以上の項を無視して

$$\begin{aligned} (2 + \frac{xy}{2})(1 - \frac{x}{2}) - (2 - \frac{xy}{2})(1 + \frac{x}{2}) &= 2 + \frac{xy}{2} - 2 \frac{x}{2} - \frac{xy}{2} \frac{x}{2} - 2 + \frac{xy}{2} - 2 \frac{x}{2} + \frac{xy}{2} \frac{x}{2} \\ &= 2 \frac{xy}{2} - 2(1 + \frac{x}{2}) \frac{x}{2} + (1 - \frac{x}{2}) \frac{xy}{2} \\ &= 2 \frac{xy}{2} - 2(1 + \frac{x}{2}) \frac{x}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、

$$\frac{xy}{2} = (1 + \frac{x}{2}) \frac{x}{2}$$

となる。ここで、 $x$  軸方向の単軸引張の場合のフックの法則

$$x = \frac{\sigma}{E}$$

と、 $x'y'$  軸におけるせん断変形に関するフックの法則

$$\frac{xy}{2} = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{2G}$$

から、

$$\frac{x}{2G} = \frac{(1 + \frac{x}{2}) x}{E}$$

である。よって、

$$G = \frac{E}{2(1 + \frac{x}{2})}$$

を得る。これは、前に定義したラーメの定数において

$$\mu = G$$

であることに他ならない。

## 2—5—6 . 体積ひずみとフックの法則

初期の体積が  $V$  の材料が、静水圧的な応力  $\nu$  の作用を受けて、膨張あるいは収縮して、その体積が  $V + \Delta V$  になるとき、体積ひずみは

$$v = \frac{(V + \Delta V) - V}{V} = \frac{\Delta V}{V}$$

で与えられる。今、変形前の微小要素の体積を

$$V = dx dy dz$$

とする。変形後には  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向にそれぞれ  $du$ 、 $dv$ 、 $dw$  だけ変位するものとする、

$$V + \Delta V = (dx + du)(dy + dv)(dz + dw)$$

であるので、

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta V}{V} = \frac{(dx + du)(dy + dv)(dz + dw) - dx dy dz}{dx dy dz} \\ &= \frac{du dy dz + dv dz dx + dw dx dy + du dv dz + dv dw dx + dw du dy + du dv dw}{dx dy dz} \\ &= \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} + \frac{u}{x} \frac{v}{y} + \frac{v}{y} \frac{w}{z} + \frac{w}{z} \frac{u}{x} + \frac{u}{x} \frac{v}{y} \frac{w}{z} \\ &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \end{aligned}$$

となる。変位あるいはひずみが非常に小さい場合には、2次以上の微小項を無視して、

$$v = \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

である。

静水圧的な応力  $p$  と体積ひずみに関するフックの法則は

$$p = K v$$

で表される。ここで、 $K$  は体積弾性係数である。

次に、体積弾性係数  $K$  をヤング率  $E$  とポアソン比  $\nu$  で表そう。体積ひずみと縦ひずみの関係から、

$$v = K(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

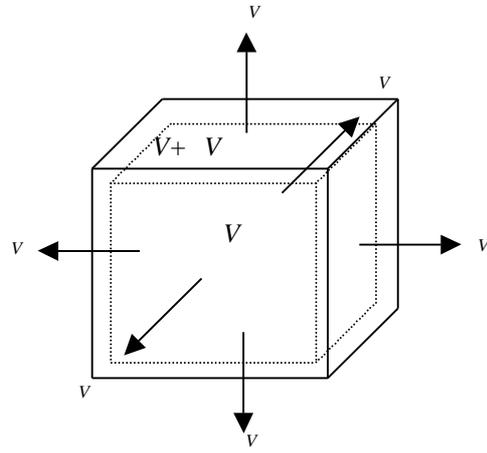
である。ここで、 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$  であるから、

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) ] = \frac{1-2\nu}{E} p \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) ] = \frac{1-2\nu}{E} p \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) ] = \frac{1-2\nu}{E} p \end{aligned}$$

であり、

$$v = \frac{\epsilon_x}{3} = \frac{\epsilon_y}{3} = \frac{\epsilon_z}{3}$$

となることが容易にわかる。よって、



$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

を得る。また、このことから、静水圧的な応力は、

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

で表される。

また、ラーメの定数を用いて、体積段数を表してみよう。ラーメの定数を用いたフックの法則は

$$\sigma_x = (2\mu + \lambda)\epsilon_x + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

であったから、 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$ 、 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ とにおいて、

$$p = (3\lambda + 2\mu)\epsilon = K\epsilon$$

より、

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

と表すことができる。

## 2-7. 一般化されたフックの法則

これまでの結果をまとめると、等方弾性体に対して、以下のような一般化されたフックの法則が成り立つ。

$$\sigma_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\sigma_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

、あるいは、

$$\begin{matrix} \sigma_x & 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_y & -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_z & -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ \sigma_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{matrix} \begin{matrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{matrix}$$

または、

$$\sigma_x = (2\mu + \lambda)\epsilon_x + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$\sigma_y = \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + (2\mu + \lambda)\epsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + (2\mu + \lambda)\epsilon_z$$

$$\sigma_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

$$\sigma_{yz} = \mu\gamma_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = \mu\gamma_{zx}$$

、あるいは、

$$\begin{matrix} \sigma_x & +2\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_y & \mu & +2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_z & \mu & \mu & +2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ \sigma_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{matrix} \begin{matrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{matrix}$$

が成り立つ。

一般には、材料の性質は等方的ではなく、異方性がある。このため、一般化されたフックの法則は

$$\epsilon_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

となる。上式の最右辺の式は、簡略のための総和則と呼ばれる記述である。ここで、 $\epsilon_{ij}$  のとき、すなわちせん断ひずみは、

$$\epsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$$

であることに注意しよう。 $\epsilon_{ij}$  は工学的せん断ひずみ、 $\gamma_{ij}$  は数学的せん断ひずみと呼ばれる。

あるいは、ひずみに対して

$$\epsilon_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 S_{ijkl} \sigma_{kl} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

と書くことができる。このとき、弾性係数  $C_{ijkl}$ 、 $S_{ijkl}$  はそれぞれスティフネス定数、コンプライアンス定数と呼ぶことがある。

## 2—8 . 弾性エネルギー（ひずみエネルギー）

断面積  $A$ 、長さ  $l$  の棒に外力  $P$  が付加され、 $dl$  だけ変位したとする。このとき、外力がなした仕事は、

$$d\bar{W} = Pdl$$

である。ここで、荷重と変位はそれぞれ

$$P = A \sigma \quad , \quad dl = l d\epsilon$$

で与えられる。従って、

$$Pdl = A l \sigma d\epsilon$$

である。ここで、 $V = Al$  とおくと、これは荷重  $P$  を付加している時の材料の体積であり、単位体積当たりになされる仕事を  $dW$  とすると、

$$dW = \frac{d\bar{W}}{V} = \frac{Pdl}{V} = \sigma d\epsilon$$

であるから、ひずみが  $\epsilon$  となるまでになされた単位体積当たりの仕事は、

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon$$

である。これが材料に蓄えられる単位体積あたりの弾性エネルギー  $U$  であり、

$$U = W = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon$$

となる。

フックの法則が成り立つ弾性変形では、単軸の垂直応力負荷の場合、右図に示す応力—ひずみ線図において、応力はひずみとともに直線的に増加していき、 $\sigma = E \epsilon$  であるから、O から A にいたる負荷経路で蓄積される単位体積当たりの弾性エネルギーは



$$U_e = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon = E \int_0^{\epsilon} \epsilon d\epsilon = \frac{E}{2} \epsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \epsilon}{2}$$

と表すことができる。弾性変形では、荷重を除くと元の形状・大きさにもどるため、A から O に至る負荷経路では、材料中に蓄積された弾性エネルギーは解放される。このことは、OAO の負荷経路において、材料の変形がないことから、外力がなした仕事は 0 であることから容易にわかる。

同様に、等方性材料に多軸応力が付加されている場合の単位体積当たりの弾性エネルギーは、フックの法則が成り立つ弾性変形では

$$U_e = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz} + \sigma_{zx} \epsilon_{zx})$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\sigma_y^2}{2E} + \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\sigma_{xy}^2}{2G} + \frac{\sigma_{yz}^2}{2G} + \frac{\sigma_{zx}^2}{2G}$$

で表される。ここで、前節で示した一般化されたフックの法則を用いると、

$$U_e = \frac{\sigma_x^2 - (\sigma_x \epsilon_y + \sigma_x \epsilon_z)}{2E} + \frac{\sigma_y^2 - (\sigma_y \epsilon_z + \sigma_y \epsilon_x)}{2E} + \frac{\sigma_z^2 - (\sigma_z \epsilon_x + \sigma_z \epsilon_y)}{2E} + \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}{2G}$$

$$= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2(\sigma_x \epsilon_y + \sigma_y \epsilon_z + \sigma_x \epsilon_z)}{2E} + \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}{2G}$$

$$= \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2(1 + \nu)(\sigma_x \epsilon_y + \sigma_y \epsilon_z + \sigma_x \epsilon_z)}{2E} + \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}{2G}$$

となる。あるいは、

$$U_e = \frac{1}{6} \{ 2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2 - (\sigma_y - \sigma_z)^2 - (\sigma_z - \sigma_x)^2 \} + \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}{2G}$$

であることから、

$$U_e = \frac{(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{6E} + \frac{(1+\nu)\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\}}{6E} + \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}{2G}$$

である。ここで、静水圧的な応力  $p$  は、

$$v = \frac{1}{3}(x + y + z)$$

であり、体積弾性係数は

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

であったから、

$$U = \frac{v^2}{2K} + \frac{(1-\nu)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}}{6E} + \frac{(xy^2 + yz^2 + zx^2)}{2G}$$

となる。ここで、右辺の第1項は体積変化に伴う弾性エネルギーであり、第2項と第3項は、せん断応力による弾性エネルギーであることが、以下に述べることからわかるであろう。

今、体積変化に伴う弾性エネルギーを

$$U_V = \frac{v^2}{2K}$$

とおいて、このエネルギーを除いた弾性エネルギー

$$U = U - U_V$$

を求めると、

$$U = \frac{(1-\nu)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}}{6E} + \frac{(xy^2 + yz^2 + zx^2)}{2G}$$

となる。主応力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  を用いると、 $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0$  なので、上式は、

$$U = \frac{(1-\nu)\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}}{6E}$$

と表される。一方、主せん断応力  $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 、 $\tau_3$  を用いると、

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

であるから、

$$U = \frac{(1-\nu)(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)}{24E}$$

あるいは、

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

より、

$$U = \frac{(1-\nu)(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)}{12G}$$

を得る。つまり、 $U$  はせん断応力による弾性エネルギーと言える。後に示されるように、材料の

塑性変形はせん断応力によって生じるので、 $U'$ は材料が塑性変形する際の基準式となることがわかるであろう。

## 2—9 . 偏差応力

材料の塑性変形には静水圧的な応力はあまり大きく影響しない。このため、材料の降伏強度を考える際には、せん断応力ならびにせん断応力成分が関わる量についての議論が必要となる。ここでは、微小要素に主応力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  が作用している場合を考える。このとき、静水圧的な応力は

$$\nu = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

で表される。今、主応力から静水圧的な応力成分を取り除いた、

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \nu, \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - \nu, \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \nu$$

で定義される偏差応力を考えよう。偏差応力は以下の3次方程式の解である。

$$\begin{aligned} & (\sigma'_1 - \sigma'_2)(\sigma'_2 - \sigma'_3)(\sigma'_3 - \sigma'_1) \\ &= \sigma_1^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma_1^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ &= \sigma_1^3 - J_1\sigma_1^2 - J_2 - J_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$ は偏差応力に対する不変量である。

まず、不変量  $J_1$  について考える。

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 - 3\nu = 0$$

である。次に不変量  $J_2$  について考える。

$$\begin{aligned} J_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ &= -\{(\sigma_1 - \nu)(\sigma_2 - \nu) + (\sigma_2 - \nu)(\sigma_3 - \nu) + (\sigma_3 - \nu)(\sigma_1 - \nu)\} \\ &= -\{(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\nu + 3\nu^2\} \\ &= -\{(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - 3\nu^2\} \\ &= \frac{1}{6}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2\} + 3\nu^2 \\ &= \frac{1}{6}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} \end{aligned}$$

となる。偏差応力の第2不変量  $J'_2$  は、主応力の第2不変量  $J_2$  と同じであることに注意しておこう。不変量  $J_3$  については、

$$\begin{aligned} J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ &= (\sigma_1 - \nu)(\sigma_2 - \nu)(\sigma_3 - \nu) \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\nu + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\nu - \nu^2 \\ &= J_3 + J_2\nu + 2\nu^2 \end{aligned}$$

で与えられる。以上の式より、結局、偏差応力については、

$$I_3 - J_2 - J_3 = 0$$

が成り立つ。この内、後述するように、偏差応力の2次の不変量  $J_2$

$$J_2 = \frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}$$

は、材料の降伏条件と密接な関係がある。

## 2—10 . 主ひずみと偏差ひずみ

ひずみに関しても、主ひずみを以下の行列式から求めることができる。

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

等方的な材料では、 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  であるから、

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} \\ = (\sigma_{xx} - \sigma)(\sigma_{yy} - \sigma)(\sigma_{zz} - \sigma) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_{xx} - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_{yy} - \sigma)\tau_{zx}^2 - (\sigma_{zz} - \sigma)\tau_{xy}^2 \\ = -\sigma^3 + (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx})\sigma \\ - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \\ = 0$$

となる。従って、ひずみの第1、第2、第3不変量をそれぞれ

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} \\ I_3 = \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 + \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 + \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}$$

とおくと、主ひずみ  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  は、

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$$

の3次方程式の解となる。

一方、主ひずみを  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  とすると、

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \\ = \sigma^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\sigma - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ = 0$$

より、ひずみの不変量は、

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 - xy - yz - zx = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xy - yz - zx$$

$$I_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 - 2xyz = xx^2 + yy^2 + zz^2 - 2xyz$$

と表すことができる。このうち、第1不変量は、体積ひずみと関係し、

$$I_1 = 3V = 1 + 2 + 3 = xx + yy + zz$$

である。

後述するように、塑性変形では体積変化は生じない。このため、上で求めた主ひずみから体積ひずみを引いた偏差ひずみ

$$1 = 1 - V, \quad 2 = 2 - V, \quad 3 = 3 - V$$

を用いると好都合であることが後に示される。このとき、

$$\begin{aligned} & (1-1)(2-2)(3-3) \\ &= 3 - (1+2+3)^2 + (1^2 + 2^2 + 3^2) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、偏差ひずみの不変量は、まず第1不変量が

$$I_1 = 1 + 2 + 3 = 1 + 2 + 3 - 3V = 0$$

となって、体積変化がないことを表す。次に第2不変量は

$$\begin{aligned} I_2 &= -(1^2 + 2^2 + 3^2) \\ &= -(1-V)(2-V) - (2-V)(3-V) - (3-V)(1-V) \\ &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 2(1+2+3)V - 3V^2 \\ &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 2\frac{(1+2+3)^2}{3} - \frac{(1+2+3)^2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \{-3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 3^2 + (1+2+3)^2\} \\ &= \frac{1}{3} (1^2 + 2^2 + 3^2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1) \\ &= \frac{1}{6} \{(1-2)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2\} \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{1}{6} \{(1-2)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2\}$$

となる。これは、主ひずみの第2不変量と等しいことに注意しておこう。

また、偏差ひずみの第3不変量は、

$$I_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

であり、結局、偏差ひずみは、以下の3次方程式の解として与えられる。

$$3 - I_2 - I_3 = 0$$

付録A：変位とひずみ

これまでは、材料力学の知識を基に、変位とひずみの関係を示してきた。この節ではより一般的な変位とひずみの関係を述べる。

今、点  $A(x, y, z)$  と点  $B(x+dx, y+dy, z+dz)$  があり、それぞれ変形後に点  $A'(x+u, y+v, z+w)$ 、点  $B'(x+dx+u+du, y+dy+v+dv, z+dz+w+dw)$  に移動したものとす。このとき、テイラー展開において2次以上の微小項を無視すると

$$\begin{aligned} u+du &= u + \frac{u}{x}dx + \frac{u}{y}dy + \frac{u}{z}dz \\ v+dv &= v + \frac{v}{x}dx + \frac{v}{y}dy + \frac{v}{z}dz \\ w+dw &= w + \frac{w}{x}dx + \frac{w}{y}dy + \frac{w}{z}dz \end{aligned}$$

と書ける。ここで、微小要素 AB の長さを  $ds$  とすると、

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

であり、微小要素 AB が  $xyz$  軸とのなす角をそれぞれ  $l, m, n$  とすると、その方向余弦は、

$$l = \cos \theta_x = \frac{dx}{ds}, \quad m = \cos \theta_y = \frac{dy}{ds}, \quad n = \cos \theta_z = \frac{dz}{ds}$$

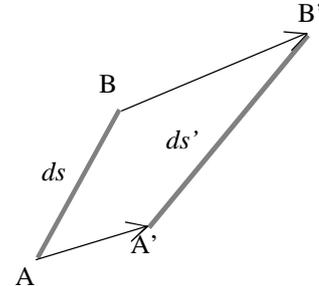
となる。よって、 $A'B'$  の変位の成分は

$$\begin{aligned} du &= \frac{u}{x}l + \frac{u}{y}m + \frac{u}{z}n \, ds \\ dv &= \frac{v}{x}l + \frac{v}{y}m + \frac{v}{z}n \, ds \\ dw &= \frac{w}{x}l + \frac{w}{y}m + \frac{w}{z}n \, ds \end{aligned}$$

と書き直すことができる。あるいは、

$$\begin{aligned} du &= \frac{u}{x}l + \frac{u}{y}m + \frac{u}{z}n \, ds \\ dv &= \frac{v}{x}l + \frac{v}{y}m + \frac{v}{z}n \, ds \\ dw &= \frac{w}{x}l + \frac{w}{y}m + \frac{w}{z}n \, ds \end{aligned}$$

となる。左辺は、変形後の微小要素  $A'B'$  の変位ベクトルである。右辺の最初の行列は方位ベクトルならびに元の長さ  $ds$  に掛かって変位ベクトルをつくるのでひずみテンソルである。しかし、このひずみテンソルは対称ではない。そこで、



$$\begin{array}{ccc}
\frac{u}{x} & \frac{u}{y} & \frac{u}{z} \\
\frac{v}{x} & \frac{v}{y} & \frac{v}{z} \\
\frac{w}{x} & \frac{w}{y} & \frac{w}{z}
\end{array}
= \frac{1}{2} \begin{array}{ccc}
\frac{u}{x} + \frac{u}{y} & & \\
\frac{v}{x} + \frac{u}{y} & & \\
\frac{w}{x} + \frac{u}{z} & & 
\end{array}
+ \frac{1}{2} \begin{array}{ccc}
\frac{u}{y} + \frac{v}{x} & & \\
\frac{v}{y} & & \\
\frac{w}{y} + \frac{v}{z} & & 
\end{array}
+ \frac{1}{2} \begin{array}{ccc}
\frac{u}{z} + \frac{w}{x} & & \\
\frac{v}{z} + \frac{w}{y} & & \\
\frac{w}{z} & & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
0 & \frac{1}{2} \frac{u}{y} - \frac{v}{x} & \frac{1}{2} \frac{u}{z} - \frac{w}{x} \\
+ \frac{1}{2} \frac{u}{y} - \frac{v}{x} & 0 & \frac{1}{2} \frac{v}{z} - \frac{w}{y} \\
- \frac{1}{2} \frac{u}{z} - \frac{w}{x} & - \frac{1}{2} \frac{v}{z} - \frac{w}{y} & 0
\end{array}$$

のように、対称テンソルと非対称テンソルに分ける。

以上より、先に述べたひずみおよび回転の定義を用いると、対称テンソルは、

$$\begin{array}{ccc}
x & \frac{xy}{2} & \frac{zx}{2} \\
\frac{xy}{2} & x & \frac{yz}{2} \\
\frac{zx}{2} & \frac{yz}{2} & x
\end{array}
= \frac{1}{2} \begin{array}{ccc}
\frac{u}{x} & & \\
\frac{v}{x} + \frac{u}{y} & & \\
\frac{w}{x} + \frac{u}{z} & & 
\end{array}
+ \frac{1}{2} \begin{array}{ccc}
\frac{u}{y} + \frac{v}{x} & & \\
\frac{v}{y} & & \\
\frac{w}{y} + \frac{v}{z} & & 
\end{array}
+ \frac{1}{2} \begin{array}{ccc}
\frac{u}{z} + \frac{w}{x} & & \\
\frac{v}{z} + \frac{w}{y} & & \\
\frac{w}{z} & & 
\end{array}$$

非対称テンソルは

$$\begin{array}{ccc}
0 & & \\
- \frac{z}{y} & 0 & \frac{y}{x} \\
- \frac{y}{x} & - \frac{x}{z} & 0
\end{array}
= \begin{array}{ccc}
0 & \frac{1}{2} \frac{u}{y} - \frac{v}{x} & \frac{1}{2} \frac{u}{z} - \frac{w}{x} \\
- \frac{1}{2} \frac{u}{y} - \frac{v}{x} & 0 & \frac{1}{2} \frac{v}{z} - \frac{w}{y} \\
- \frac{1}{2} \frac{u}{z} - \frac{w}{x} & - \frac{1}{2} \frac{v}{z} - \frac{w}{y} & 0
\end{array}$$

と書ける。あるいは、ひずみ成分で表すと、以下のようになる。

$$ij = \frac{1}{2} \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \quad , \quad ij = \frac{1}{2} \frac{u_i}{x_j} - \frac{u_j}{x_i}$$

ただし、 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$  である。

## 付録B．主ひずみと不変量

応力の場合と同様に、 $xyz$  座標から  $x'y'z'$  座標への座標変換行列について、

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

と定義する。また、ひずみテンソルについても、

$$= \begin{pmatrix} x & xy/2 & xz/2 \\ yx/2 & y & yz/2 \\ zx/2 & zy/2 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

とおくと、 $x'y'z'$ 座標系におけるひずみテンソルは、

$$= \mathbf{a}^T \mathbf{a}$$

となる。

また、 $x'y'z'$ 座標系において、せん断ひずみが0となるときの、主ひずみは、

$$l_1 = l, \quad l_2 = m, \quad l_3 = n$$

とおけるので、

$$\begin{pmatrix} x & xy/2 & xz/2 \\ yx/2 & y & yz/2 \\ zx/2 & zy/2 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{pmatrix} x - l & xy/2 & xz/2 \\ yx/2 & y - m & yz/2 \\ zx/2 & zy/2 & z - n \end{pmatrix} = 0$$

から、

$$\begin{vmatrix} x - l & xy/2 & xz/2 \\ yx/2 & y - m & yz/2 \\ zx/2 & zy/2 & z - n \end{vmatrix} = 0, \text{ あるいは、} \det(\mathbf{a} - \mathbf{I}) = 0$$

である。これを計算すると、

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x - l & xy/2 & xz/2 \\ yx/2 & y - m & yz/2 \\ zx/2 & zy/2 & z - n \end{vmatrix} \\ &= (x - l)(y - m)(z - n) + \frac{xyz}{4} - \frac{(x - l)yz}{4} - \frac{(y - m)zx}{4} - \frac{(z - n)xy}{4} \\ &= -l^3 + (x + y + z)^2 - \{xyz + yz^2 + zx^2 + xy^2 - \frac{1}{4}(xy^2 + yz^2 + zx^2)\} \\ &+ xyz + \frac{xyz}{4} - \frac{xyz}{4} = 0 \end{aligned}$$

を得る。

一方、主ひずみを用いると、上の3次方程式は

$$\begin{aligned} & (\lambda - \sigma_1)(\lambda - \sigma_2)(\lambda - \sigma_3) \\ &= \lambda^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\lambda^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\lambda - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

で表される。従って、

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0$$

となり、ひずみに対する第1、第2、第3の不変量

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = x + y + z$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ &= -\frac{1}{4}\{4(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ &= x y z + \frac{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}{4} - \frac{\sigma_x^2\sigma_y^2 + \sigma_y^2\sigma_z^2 + \sigma_z^2\sigma_x^2}{4} \end{aligned}$$

を得る。ここで、工学的せん断ひずみ  $\sigma_{ij}$ 、数学的せん断ひずみ  $\tau_{ij}$  が

$$\tau_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2}$$

であったことを思い出すと、2—10節の結果を得ることが容易にわかるであろう。