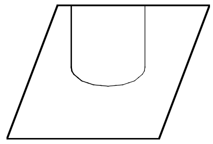
材料力学問題　第２編

問題１．図１のように、床に固定して立てられた直径 3 mm、長さ 50 cm の棒がある。この棒の上端に圧縮荷重 P を付加したとき、以下の各問いに答えなさい。
（１）棒の材料はアルミニウムでありヤング率を 70 GPa である。
弾性変形するものとして、座屈荷重 P_{cr} を求めなさい。
（２）このアルミニウムの塑性変形開始、すなわち降伏は、主せん断応力が 70 MPa 以上のときに生じるものとする。棒の降伏が起こる荷重 P_y を求めなさい。
（３）棒の直径を変えたとき、降伏が起こる荷重 P_y と座屈荷重 P_{cr} が同じになるかどうかを調べなさい。



問題２．板内に $\sigma_x = 40\ \mathrm{MPa}$ 、 $\sigma_y = -40\ \mathrm{MPa}$ 、 $\tau_{xy} = 30\ \mathrm{MPa}$ の応力が分布している。

このとき、以下の各問いに答えなさい。
（１）主応力 σ_1、σ_2 を求めなさい。主応力面は xy 座標から何度傾いているか求めなさい。なお、xy 座標と主応力面の関係を図に描くこと。
（２）主せん断応力 τ_1 を求めなさい。主せん断応力面は xy 座標から何度傾いているか求めなさい。なお、xy 座標と主せん断応力面の関係を図に描くこと。
（３）xy 座標から角度 θ だけ傾いた $x'y'$ 座標における応力成分 $\sigma_{x'}$、$\sigma_{y'}$、$\tau_{x'y'}$ を作図法（モールの円）を用いて求めたい。横軸に法線応力 σ をとり、縦軸にせん断応力 τ を取り、

$$\text{中心}\quad \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right)、\ \text{半径}\ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

の円を作ると、点 $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ ならびにその対称となる点 $B(\sigma_y, -\tau_{xy})$ が定まることを示しなさい。また、モールの円に点A、Bを描き入れなさい。
（４）主応力 σ_1、σ_2 がモールの円と横軸の交点で表されることを示しなさい。また、主せん断応力 τ_1 をモールの円のどこに位置するか示しなさい。
（５）xy 座標から 22.5°傾いた面での $\sigma_{x'}$、$\sigma_{y'}$、$\tau_{x'y'}$ を求めなさい。

問題３． $\sigma_x = 40\ \mathrm{MPa}$ 、 $\sigma_y = -20\ \mathrm{MPa}$ 、 $\sigma_z = 0\ \mathrm{MPa}$ 、 $\tau_{xy} = 20\ \mathrm{MPa}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\ \mathrm{MPa}$ の応力成分を有する材料がある。このとき、以下の各問いに答えなさい。
（１）主応力 σ_1、σ_2、σ_3 を求めなさい。
（２）主せん断応力 τ_1、τ_2、τ_3 を求めなさい。
（３）材料に働く静水圧的な応力 σ を σ_x、σ_y、σ_z を用いて求めなさい。同様にして、主応力を用いて静水圧的な応力 σ を求めなさい。

問題４．以下の各問いに答えなさい。
（１）材料のヤング率を E、ポアソン比を ν とするとき、剛性率 G、体積弾性係数 K を E と ν を用いて導出しなさい。
（２）問題３において、材料はヤング率 $E = 206\ \mathrm{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.28$ の鋼であった。x、y、z 方向のひずみ ε_x、ε_y、ε_z、ならびにせん断ひずみ γ_{xy} を求めなさい。
（３）問題３において、体積ひずみ ε_v をもとめなさい。

問題５．等方性材料で成り立つ以下のフックの法則

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]、\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]、\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}、\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}、\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

を用いて、以下の各問いに答えなさい。なお、以下の各問いの答えは、剛性率 G ならびにポアソン比νを用いて表しなさい。

（１）単位体積当たりの弾性エネルギーU_eを、応力の関数として表しなさい。

（２）単位体積当たりの弾性エネルギーU_eを、ひずみの関数として表しなさい。

（３）（１）で求めた解は、応力の第２不変量 J_2 とどのような関係にあるか求めなさい。

（４）（１）の解を、主応力σ_1、σ_2、σ_3ならびに主応力で表される第２不変量 J_2 を用いて表しなさい。

（５）単軸引張状態にある材料においては、

$$U_e = \frac{\sigma_1{}^2}{2E} = \frac{(1-\nu)\sigma_1{}^2}{G}$$

である。この材料が降伏強さσ_Y に至るまで、フックの法則に従って弾性変形するものとする。多軸応力状態でも、上記の弾性エネルギーが材料に蓄積されたときに、材料の塑性変形が始まる、すなわち降伏するものとする。このとき、（４）の解を用いて、以下のように相当応力

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

を定義するとき、多軸応力状態の材料が降伏する条件は

$$\bar{\sigma} \geq \sigma_Y$$

であることを証明しなさい（これをミゼスの降伏条件という）。

（６）問題３に与えた材料は、単軸引張試験を行ったところ、降伏強さが $\sigma_Y = 80\ \mathrm{MPa}$ であった。

$\sigma_x = 40\ \mathrm{MPa}$、$\sigma_y = -20\ \mathrm{MPa}$、$\sigma_z = 0\ \mathrm{MPa}$、$\tau_{xy} = 20\ \mathrm{MPa}$、$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\ \mathrm{MPa}$ の応力付加をおこなったとき、この材料が降伏するかどうかを検証しなさい。

（７）トレスカは、最大せん断応力がある臨界値を越えると材料が降伏するとした。せん断応力で表される降伏強さを k とするとき、

$$k = \frac{\sigma_Y}{2}$$

である。$\sigma_x = 40\ \mathrm{MPa}$、$\sigma_y = -20\ \mathrm{MPa}$、$\sigma_z = 0\ \mathrm{MPa}$、$\tau_{xy} = 20\ \mathrm{MPa}$、$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\ \mathrm{MPa}$ において主せん断応力τ_1、τ_2、τ_3 を求め、トレスカの降伏条件を用いて材料の降伏（すなわち、$\tau_1 \geq k$）が起こるかどうか検証しなさい。

問題６．ある金属の単軸引張試験で、応力とひずみの関係が、

$$\sigma = 200\varepsilon^{0.25}\quad [\mathrm{MPa}]$$

で与えられた。この関係を相当応力（問題５の（５）を参照）、ならびに以下の相当ひずみ

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_3{}^2)}$$

に置き換えられるものとする。今、同じ材料の平板の面に平行な方向に作用する主応力σ_1 とσ_2 の関係は常に $\sigma_1 = 2\sigma_2$ が成り立つ。$\sigma_1 = 160\ \mathrm{MPa}$、 $\sigma_2 = 80\ \mathrm{MPa}$ まで応力を付加したときの、主軸 1、2、3 方向の塑性ひずみを求めなさい。ただし、弾性ひずみは無視して良い。