平成22年度　材料力学　中間試験問題（H22.11.8、中村担当）
※数値解は小数点以下も含めて有効数字3桁で答えること

問題１．図１に示すように、剛体壁にA点、B点で固定された長さ$4l$、半径a、ヤング率Eの丸棒状のはりがあり、中央部CF間の長さ$2l$の領域において均一な分布荷重wが作用している。このとき、以下の各問いに答えよ。ただし自重によるたわみは含めないものとする。（５０点）
（１）中立軸周りの断面二次モーメントIを求めよ。
（２）A点での反力をR_A、固定モーメントをM_A、B点での反力をR_B、固定モーメントをM_Bとする。力とモーメントのつりあい式を導け。
（３）A点からはりに沿ってx軸をとる。AC間の断面に作用する曲げモーメントをM_{AC}とし、その位置でのたわみ角をi_{AC}、たわみをy_{AC}とする。C点でのたわみ角i_C、たわみδ_Cを求めよ。ただし、（２）において反力や固定モーメントが未知である場合にはそのまま使ってよく、また、曲げ剛性もEIとしてよい。
（４）はりの中央をD点とし、CD間の断面に作用する曲げモーメントをM_{CD}、またその位置でのたわみをy_{CD}とする。（２）と同様にして、CD間のたわみ角i_{CD}ならびにたわみy_{CD}について考え、これよりM_A、M_Bを求めよ。
（５）$4l = 4$ m、$a = 20$ cm、$E = 200$ GPa、$w = 53$ kN/mのとき、D点のたわみδ_D（単位mm）を求めよ。
※（２）～（４）の解答では必ず自由体線図を描くこと。

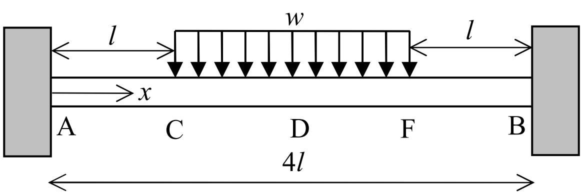

図１

問題２．長さ$l = 4$ m、断面の半径$a = 20$ cmの鋼製の丸棒（ヤング率はE =200 GPa、ポアソン比は$\nu = 0.3$）がある。このとき以下の各問いに答えよ。（５０点）
（１）この鋼のせん断強度に対する許容応力は$\tau_a = 30$ MPaと設定されている。このとき棒内の最大せん断応力が許容応力以下となるトルクTを求めよ。また、この丸棒が3600rpmの角速度で回転する時、最大せん断応力が許容応力以下となる範囲で伝達できる動力PをMWならびに馬力の単位で求めよ。なお、必要であれば、剛性率は$G = E/\{2(1 + \nu)\}$で与えられることを利用して計算せよ。
（２）丸棒が床に対して垂直に立てられており、その両端が回転支持となっている場合を考える。床の支持点をA点、自由端をB点とする。自由端B点におもりを静かにのせた時に、棒の弾性座屈が起こる臨界荷重P_{cr}を求める式を導出し、その値（単位kN）を求めよ。
（３）（２）において弾性座屈が起こるまで、丸棒は荷重軸方向にそって圧縮変形するものとして、丸棒内に蓄積される弾性エネルギーU（単位MJ）ならびに単位体積あたりの弾性エネルギーu（単位J/m^3）を求めよ。※荷重P_{cr}のときの弾性エネルギーを計算すればよい。
（４）（２）のように床に垂直に立てた丸棒に対して、静かにおもりをのせるのではなく、質量$m = 1000$ kgの剛体が自由端B点より高さh=100 mのところから落下して衝突したものとする。このとき剛体の衝突によって生じる衝撃荷重によって座屈が起こるかどうか調べよ。ただし、重力の加速度を$g = 9.8$ m/s^{2}とする。

解答例

問題 1.

（1）　$I = \dfrac{I_p}{2} = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2 \times r dr d\theta = \dfrac{\pi a^4}{4}$

（2）　$R_A = R_B = wl$ 、$M_A = M_B$

（3）　$M_{AC} = R_A x + M_A = wlx + M_A$ 、$\dfrac{d^2 y_{AC}}{dx^2} = -\dfrac{M_{AC}}{EI} = -\dfrac{1}{EI}(wlx + M_A)$

$$\frac{dy_{AC}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{wlx^2}{2} + M_A x\right)、\ y_{AC} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{wlx^3}{6} + \frac{M_A x^2}{2}\right)$$

これらより、

$$i_{AC} \approx \left.\frac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=l} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{wl^3}{2} + M_A l\right)、\ \delta_C = \left.y_{AC}\right|_{x=l} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{wl^4}{6} + \frac{M_A l^2}{2}\right)$$

（4）　$M_{CD} = R_A x + M_A - \dfrac{w(x-l)^2}{2} = wlx + M_A - \dfrac{w(x-l)^2}{2}$

$$\frac{d^2 y_{CD}}{dx^2} = -\frac{M_{CD}}{EI} = -\frac{1}{EI}\left\{wlx + M_A - \frac{w(x-l)^2}{2}\right\}$$

$$\frac{dy_{CD}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{wlx^2}{2} + M_A x - \frac{w(x-l)^3}{6} + C_3\right\}$$

はりの連続性より、C 点において、

$$i_C \approx \left.\frac{dy_{CD}}{dx}\right|_{x=l} = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{wl^3}{2} + M_A l + C_3\right\} = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{wl^3}{2} + M_A l\right\} より、C_3 = 0$$

また、左右対称より、

$$\left.\frac{dy_{CD}}{dx}\right|_{x=2l} = -\frac{1}{EI}\left\{2wl^3 + M_A l - \frac{wl^3}{6}\right\} = -\frac{1}{EI}\left\{M_A l + \frac{11wl^3}{6}\right\} = 0 より、M_A = M_B = -\frac{11wl^2}{6}$$

を得る。また、たわみは

$$y_{CD} = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{wlx^3}{6} + \frac{11wl^2x^2}{12} - \frac{w(x-l)^4}{24} + C_4\right\}$$

となる。C 点での貼りの連続性より、

$$\delta_C = \left.y_{CD}\right|_{x=l} = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{wl^4}{6} - \frac{11wl^4}{12} + C_4\right\} = \frac{wl^4}{12EI} なので、C_4 = 0$$

をえる。

（４）

$$\delta_D = y_{CD}\big|_{x=2l} = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{8wl^4}{6} - \frac{11wl^4}{3} - \frac{wl^4}{24}\right\} = \frac{(-32+88+1)wl^4}{24EI} = \frac{57wl^4}{24EI}$$

$$= \frac{57\times 53\times 1000\times 1^4}{24\times 200\times 10^9\times \pi\times (0.02)^4/4} = 0.50\,\mathrm{mm}$$

問題２

（１）

$$T \le \int_0^{2\pi}\int_0^a \tau(r)\times r\times r dr d\theta = 2\pi\int_0^a \tau(r) r^2 dr = \frac{2\pi\tau_a}{a}\int_0^a r^3 dr = \frac{\pi\tau_a a^3}{2}$$

$$= \frac{\pi\times 30\times 10^6\times 0.2^3}{2} = 377\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$P = T\omega \le 377\times 1000\times \frac{3600\times 2\pi}{60} = 142\,\mathrm{MW} = 193\times 10^3\text{馬力}$$

（２）

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{EI}、\ y = A\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x + B\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x、\ y\big|_{x=0} = A = 0$$

$$y\big|_{x=l} = B\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}l = 0、\ P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^3 Ea^4}{4l^2} = \frac{\pi^3\times 200\times 10^9\times 0.2^4}{4\times 4^2} = 155\,\mathrm{MN}$$

（３）

ばね係数を k とすると、$P = kx$ より、$\sigma = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{kl}{\pi a^2}\frac{x}{l} = E\varepsilon$ なので、$k = \frac{\pi a^2 E}{l}$ である。

これより、$U = \frac{Px}{2} = \frac{P^2}{2k} = \frac{P^2 l}{2\pi a^2 E} = \frac{(155\times 10^3)^2\times 4}{2\pi\times 0.2^2\times 200\times 10^9} = 1.91\mathrm{MJ}$

$$u = \frac{U}{\pi a^2 l} = \frac{1.91}{2\pi\times 0.2^2\times 4} = 381\,\mathrm{J/m^3}$$

（４）　衝撃荷重を P_I とすると、$mg(h+x) = \frac{P_I x}{2}$ より、$P_I^2 - 2mgP_I - 2kmgh = 0$ なので、

$$P_I = mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh} = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\right) = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{2\pi a^2 Eh}{mgl}}\right)$$

$$= 1000\times 9.8\times\left(1+\sqrt{1+\frac{2\pi\times 0.2^2\times 200\times 10^9\times 100}{1000\times 9.8\times 4}}\right) = 111\mathrm{MN}$$

となり、座屈は起こらない。