平成 23 年度　材料力学　中間試験問題

１．図１に示すように，断面の高さ $h = 8\,\mathrm{cm}$， $b = 6\,\mathrm{cm}$，長さ $l = 3\,\mathrm{m}$ の木製はりの一端 A が壁に固定され，他端 B は回転支持で支持されて，均一分布荷重 $w = 400\,\mathrm{N/m}$ が作用している．この木のヤング率は $E = 10\,\mathrm{GPa}$ である．

（１）はりの自由体線図をかき，A 点での反力 R_A，固定モーメント M_A，B 点での反力 R_B の値を求めよ．

（２）曲げ剛性 EI の値を求めよ．ただし I は中立軸周りの断面２次モーメントである．

（３）A 点から 1m の距離にある C 点におけるたわみ角 i_C，たわみ y_C の値を求めよ

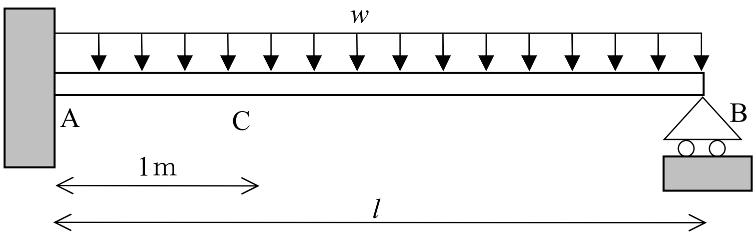


図１

２．長さ $l = 10\,\mathrm{m}$，直径 $d = 2\,\mathrm{m}$ の鋼製丸棒（剛性率 $G = 78\,\mathrm{GPa}$）が 3600 rpm で回転して 1500 馬力の動力を伝えている．

（１）断面２次極モーメント I_p の値を求めよ．

（２）棒に働くトルク T および最大せん断応力 τ_{max} の値求めよ．また，ねじりによって棒の外表面に沿って生じる両端の角度のずれ ϕ の値，棒の断面で生じる両端の角度のずれ φ の値を rad，deg の単位で求めよ．

３．長さ l，断面の幅 b，厚さ t，ヤング率 E（ただし，$l >> b > t$）のプラスチック製定規を両手ではさみ，長さ方向に圧縮荷重 P を加える．

（１）定規が弾性座屈を行うものとして，座屈が起こりやすい曲げにおける断面二次モーメント I ならびに最小の臨界座屈荷重 P_{cr} を求めよ．ただし臨界座屈荷重の導出過程を書くこと．

（２）長さ $l = 30\,\mathrm{cm}$，断面の幅 $b = 3\,\mathrm{cm}$，厚さ $t = 0.2\,\mathrm{cm}$，またプラスチックのヤング率を $E = 3\,\mathrm{GPa}$ として，最小の臨界座屈荷重 P_{cr} の値を kgf の単位で求めよ．ただし重力の加速度を $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする．

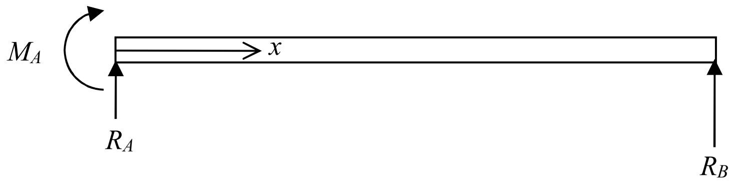
1．図１に示すように，断面の高さ $h=8\,\mathrm{cm}$， $b=6\,\mathrm{cm}$，長さ $l=3\,\mathrm{m}$ の木製はりの一端 A が壁に固定され，他端 B は回転支持で支持されて，均一分布荷重 $w=400\,\mathrm{N/m}$ が作用している．この木のヤング率は $E=10\,\mathrm{GPa}$ である．

（１）はりの自由体線図をかき，A 点での反力 R_A，固定モーメント M_A，B 点での反力 R_B の値を求めよ．

（２）曲げ剛性 EI の値を求めよ．ただし I は中立軸周りの断面２次モーメントである．

（２）A 点から 1m の距離にある C 点におけるたわみ角 i_C，たわみ y_C の値を求めよ．

（１）



$$R_A+R_B=wl\,,\quad M_A=-\frac{wl^2}{2}+R_Bl=\frac{wl^2}{2}-R_Al$$

x の位置での曲げモーメントは， $M_x=-\dfrac{wx^2}{2}+R_Ax+M_A$ である．よって，A 点でたわみ角，たわみが 0 であることを考慮して，

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M_x=\frac{wx^2}{2}-R_Ax-M_A\,,\quad EI\frac{dy}{dx}=\frac{wx^3}{6}-\frac{R_Ax^2}{2}-M_Ax\,,\quad EIy=\frac{wx^4}{24}-\frac{R_Ax^3}{6}-\frac{M_Ax^2}{2}$$

次に B 点でたわみが 0 であることから，

$$EI\,y\big|_{x=l}=\frac{wl^4}{24}-\frac{R_Al^3}{6}-\frac{M_Al^2}{2}=0\,,\quad M_A=\frac{wl^2}{12}-\frac{R_Al}{3}=\frac{wl^2}{2}-R_Al$$

を得る．以上より，

$$R_A=\frac{5wl}{8}=\frac{5\times400\,\mathrm{N/m}\times3\,\mathrm{m}}{8}=750\,\mathrm{N}\,,\quad R_B=\frac{3wl}{8}=\frac{3\times400\,\mathrm{N/m}\times3\,\mathrm{m}}{8}=450\,\mathrm{N}$$

$$M_A=-\frac{wl^2}{2}+R_Bl=-\frac{wl^2}{2}+\frac{3wl^2}{8}=-\frac{wl^2}{8}=-\frac{400\,\mathrm{N/m}\times(3\,\mathrm{m})^2}{8}=-450\,\mathrm{N\cdot m}$$

となる．

（２） $$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{6\,\mathrm{cm}\times(8\,\mathrm{cm})^3}{12}=256\,\mathrm{cm}^4=256\times10^{-8}\,\mathrm{m}^4$$

$$EI=10\times10^9\,\mathrm{N/m^2}\times256\times10^{-8}\,\mathrm{m}^4=25600\,\mathrm{N\cdot m^2}$$

（３）（１）の結果より，任意の位置でのたわみ角 i とたわみ y は以下で与えられる．

$$i\approx\frac{dy}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{wx^3}{6}-\frac{R_Ax^2}{2}-M_Ax\right)=\frac{wx}{48EI}(8x^2-9lx+6l^2)$$

$$y=\frac{1}{EI}\left(\frac{wx^4}{24}-\frac{R_Ax^3}{6}-\frac{M_Ax^2}{2}\right)=\frac{wx^2}{48EI}(2x^2-3lx+3l^2)$$

よって，

$$i_C\approx\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1\mathrm{m}}=\frac{400\,\mathrm{N/m}\times1\,\mathrm{m}}{48\times25600\,\mathrm{N\cdot m^2}}\{8\times(1\mathrm{m})^2-9\times3\,\mathrm{m}\times1\mathrm{m}+6\times(3\,\mathrm{m})^2\}=0.0114\,\mathrm{rad}=0.652\,\mathrm{deg}$$

$$y_C = y\big|_{x=1\mathrm{m}} = \frac{400\,\mathrm{N/m}\times(1\mathrm{m})^2}{48\times 25600\,\mathrm{N\cdot m^2}}\{2\times(1\mathrm{m})^2 - 3\times 3\,\mathrm{m}\times 1\,\mathrm{m} + 3\times(3\,\mathrm{m})^2\} = 0.00651\,\mathrm{m} = 6.51\,\mathrm{mm}$$

２．長さ $l = 10\,\mathrm{m}$，直径 $d = 2\,\mathrm{m}$ の鋼製丸棒（剛性率 $G = 78\,\mathrm{GPa}$）が 3600 rpm で回転して 1500 馬力の動力を伝えている．

（１）断面２次極モーメント I_p の値を求めよ．

（２）棒に働くトルク T および最大せん断応力 τ_{max} の値求めよ．また，ねじりによって棒の外表面に沿って生じる両端の角度のずれ ϕ の値，棒の断面で生じる両端の角度のずれ φ の値を rad，deg の単位で求めよ．

（１）　表面の半経を r_o とすると，

$$I_p = \int_0^{r_o} r^2 \times 2\pi r dr = 2\pi\int_0^{r_o} r^3 dr = \frac{\pi r_o{}^4}{2} = \frac{\pi(1\mathrm{m})^4}{2} = 1.57\,\mathrm{m}^4$$

を得る．

（２）　題意より，トルクは $T = P\omega = 1500\text{馬力}\times 75\times 9.8\,\mathrm{N\cdot m/sec/}\text{馬力}\times\dfrac{2\pi\times 3600\,\mathrm{rpm}}{60\,\mathrm{min/sec}} = 4.16\times 10^8\,\mathrm{N\cdot m}$

である．r の位置におけるせん断応力は $\tau = \tau_{\max}\dfrac{r}{r_o}$ であり，トルクとは

$$T = \int_{r_i}^{r_o} \tau r \times 2\pi r dr = \frac{\tau_{\max}}{r_o}\int_0^{r_o} r^2 \times 2\pi r dr = \frac{\tau_{\max}}{r_o} I_p$$

の関係があるので，

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} r_o = \frac{4.16\times 10^8\, N\cdot m \times 1m}{1.57 m^4} = 264.6\,\mathrm{MPa}$$

を得る．また，ねじり棒の幾何学より，表面でのせん断ひずみを γ として，

$$\tau_{\max} = G\gamma = G\tan\phi,\quad \phi = \arctan\left(\frac{\tau_{\max}}{G}\right) = \arctan\left(\frac{0.2646\,\mathrm{GPa}}{78\,\mathrm{GPa}}\right) = 0.00339\,\mathrm{rad} = 0.194\,\mathrm{deg}$$

$$r_o\varphi = l\tan\phi,\quad \varphi = \frac{l}{r_o}\tan\phi = \frac{l}{r_o}\frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{10\,\mathrm{m}}{1\mathrm{m}}\frac{0.2646\,\mathrm{GPa}}{78\,\mathrm{GPa}} = 0.0339\,\mathrm{rad} = 1.94\,\mathrm{deg}$$

である．

３．長さ l，断面の幅 b，厚さ t，ヤング率 E（ただし，$l >> b > t$）のプラスチック製定規を両手ではさみ，長さ方向に圧縮荷重 P を加える．

（１）定規が弾性座屈を行うものとして，座屈が起こりやすい曲げにおける断面二次モーメント I ならびに最小の臨界座屈荷重 P_{cr} を求めよ．ただし臨界座屈荷重の導出過程を書くこと．

（２）長さ $l = 30\,\mathrm{cm}$，断面の幅 $b = 3\,\mathrm{cm}$，厚さ $t = 0.2\,\mathrm{cm}$，またプラスチックのヤング率を $E = 3\,\mathrm{GPa}$ として，最小の臨界座屈荷重 P_{cr} の値を kgf の単位で求めよ．ただし重力の加速度を $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする．

（１）　もっとも曲がり易いのは薄い板厚の方向であるので，$I = \dfrac{bt^3}{12}$ である．

ここで，両手のひらで定規をはさみ，定規の両端は回転できるものとする．モーメントのつりあいより，

一端から x の位置における曲げモーメントは $M_x = Py$ である．これより

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}y\,,\quad y = A\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x + B\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x\,,$$ ただし A，B は定数.

両端でたわみがないので,

$$y\big|_{x=0} = A = 0\,,\quad y\big|_{x=l} = B\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}l = 0\,,\quad \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}l = n\pi\,,\quad n = 1,2,\cdots$$

を得る．これより，最小の臨界座屈荷重は

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 Ebt^3}{12l^2}$$

となる．

（２）　$$P_{cr} = \frac{\pi^2 Ebt^3}{12l^2} = \frac{\pi^2 \times 3\times10^9\ \mathrm{N/m^2}\times 0.03\,\mathrm{m}\times(0.002\,\mathrm{m})^3}{12\times(0.3\,\mathrm{m})^2} = 6.58\,\mathrm{N} = 0.671\,\mathrm{kgf}$$