「別冊『確率システムシンポジウム 50 回記念』特集号」 解 説

確率リャプノフ安定論––ノイズが導く多様な安定性

西村 悠樹*

1. はじめに

理論的に構築されたシステムモデルは，多かれ少なかれ実在のシステムとは挙動が異なる。しかし，このことはシステム制御理論に奥深さと多様性とを与える一助にもなっている。モデル化誤差や測定誤差，あるいはパラメータ変動など，理想と現実のギャップを考慮することは制御設計にとって重要な課題である。

システム制御理論における理想と現実のギャップの一種に，ノイズがある。ノイズとは一般的にはシステムの挙動を妨げる余計な信号のことであり，システムの外部から意図せずに加えられる外乱のこともあるが，システムに内在することもある[1]。

本稿では，多様なノイズのうちガウス型ホワイトノイズのみを扱う。これはガウス分布（正規分布）に従い全ての周波数を持つ（白色性）ような確率性信号であり，確率システム論における最も基礎的な信号である[2]。

常微分方程式に従うシステム（確定システム）にガウス型ホワイトノイズが与えられると，システムは確率微分方程式に従うようになる（確率システム）[3]。確率微分方程式は常微分方程式とは異なる枠組みで体系化されているため，その安定論も一から構築する必要がある。

実際のところ，確率システムの安定性は多様であり，確定システムの漸近安定性に対応する性質だけでも複数の定義が存在する。そのため，確率システムの安定論はその創始から半世紀以上が過ぎた現在においてもその基礎に未解決部分を残したままとなっている。

確率システム安定論の基礎は，1960 年代に Khasminskii[15]，Kushner[17]，Kozin[19] などにより築かれ，Arnold[1], Aubin and Deprato[3]，Mao[26]，Levakov[21] などにより発展した。制御設計に直接関わるものとしては例えば Arnold[2]，Mao[25]，Florchinger [6,7]，Bardi and Cesaroni[4] による成果がある。内部安定性ではなく入出力安定性に関わるもの（確率入力状態安定性やノイズ状態安定性など）としては Deng ら [5]，Liu ら [23] などが代表的である。確率有限時間安定性については少々遅く Yin ら [38] 辺りから本格的な研究が始まっており，最近ではスライディングモード制御との融合が Poznyak[34] により試みられている。

筆者を含む研究グループにおける確率システム安定論への貢献としては，安定性の定義そのものに直接関わるもの [28,31,45,47]，ノイズによる安定化 [10,29,33]，確率有限時間安定性 [11,41]，入出力安定性に関わるもの [13,14] などがある。

本稿では，確率システムのリャプノフ安定論におけるこれら基礎的部分の発展を追い，時に筆者らの成果を紹介しながら，確定システムにおけるリャプノフ安定論との違いを検証する。

* 鹿児島大学学術研究院理工学域工学系
Key Words: stochastic system, Lyapunov stability

[1] ノイズ（雑音，noise）という用語の正確な定義は難しい。広辞苑第 7 版（岩波書店）「信号の邪魔になる電気的擾乱」，電気用語辞典（コロナ社）「情報の伝達を妨害する複雑な音響」，機械工学用語辞典（理工学社）「①一般に不規則な性質をもち，明確な振動数成分を示さない信号 ②情報内容を不鮮明にするような，好ましくないじょう乱」，Concise Oxford English Dictionary (Oxford University Press) “irregular fluctuations accompanying and tending to obscure an electrical signal or other significant phenomenon”。一部の辞書を除いては望ましくない信号であることが多いようだが，確率システム論では入力信号とみなす確率信号を全てノイズと呼称することが多く，確率信号の印加による安定化 [39,46] や確率共鳴 [27] のように役立つ信号に対しても「ノイズ」と呼称する。また，ノイズという語に確率性（試行毎に値が変わる性質）と振動性（ある閾値や確定的信号などを基準として何度も揺れ動く信号）の両方が必ず付随するかはよく分からない。

[2] 現実的にはノイズがいつもガウス分布のように整った分布に従うとも，白色性を持つとも，もっと言えばマルコフ性を持つとも限らない。そのためガウス型ホワイトノイズは理想化されたノイズとも言えるが，この理想化により確率システム論が大きく発展した。従って，語弊を承知で敢えて例えるならば，確率システム論におけるガウス型ホワイトノイズは，制御理論における線形フィードバックと同じような立ち位置にある。

[3] 常微分方程式と確率微分方程式との違いは，実は確率信号の有無ではない。例えば確率信号の一種である有色ノイズが含まれる場合，常微分方程式で表現できることは広く知られている [15]。両者の違いは，表面的には白色性信号の有無だが，より根源的には入力信号が非有界変動関数のダイナミクスに従っているかどうかである。概論的には拙著 [30,32,46] を，理論的により詳細な議論は例えば [8,24,40] を参照されたい。

2. 準備：記号の定義とシステムの記述

まずは本稿で用いる記号を定義する。本稿では $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし，特に $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ とする．また，関数 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ と $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を考え，V と h についてのリー微分を

$$(L_hV)(x):=\frac{\partial V(x)}{\partial x}h(x) \tag{1}$$

とする．

次に，ガウス型ホワイトノイズの「素」であるウィーナー過程を簡単に紹介する。確率過程 $w:[0,\infty)\to\mathbb{R}^d$ と時刻 $0\le s<\tau<t$ を考える．確率過程 w が（標準）ウィーナー過程であるとは，連続関数で初期値が $w(0)=0$ であり，かつその増分 $w(t)-w(s)$ がガウス分布（正規分布）に従い，さらに

$$\mathbb{E}\{w(t)-w(s)\}=0 \tag{2}$$
$$\mathbb{E}\{(w(t)-w(s))(w(t)-w(s))^T\}=(t-s)I \tag{3}$$
$$\mathbb{E}\{(w(t)-w(\tau))(w(\tau)-w(s))^T\}=0 \tag{4}$$

（ただし，$\mathbb{E}\{A\}$ はある事象 A の期待値，I は単位行列）を満たすことをいう[1]。

以上の準備の下，常微分方程式から確率微分方程式を導く流れを簡潔に説明する。はじまりの確定システムを常微分方程式

$$\dot{x}(t)=f(x(t))+\sum_{\alpha=1}^{d}\sigma_\alpha(x(t))\dot{u}_\alpha(t) \tag{5}$$

とする。ここで，時間変数 $t\in[0,\infty)$，状態 $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ と入力 $\dot{u}$ の積分を $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}^d$ とし，$f,\sigma_1,\dots,\sigma_d:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ は全て滑らかであるとする。また，初期時刻 $t=0$ と初期値 $x(0)=x(0)\in\mathbb{R}^n$ は与えられているとする。確定システム (5) の両辺を時間変数 t で積分した上で u を d 次元標準ウィーナー過程とすると（$u=w$），積分方程式

$$\int_0^t dx(\tau)=\int_0^t f(x(\tau))d\tau+\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^t\sigma_\alpha(x(\tau))dw_\alpha(\tau) \tag{6}$$

が得られるが，この式の右辺における最後の積分は

$$\int_0^t\sigma_\alpha(x(\tau))dw_\alpha(\tau)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{k=1}^{N}\sigma_\alpha(x(t_{k-1}))\{w(t_k)-w(t_{k-1})\} \tag{7}$$

と定義される伊藤積分である。なお，上の式では時間区間 $[0,t]$ を数列 $0=t_0<\cdots<t_N=t$ で N 分割しており，l.i.m は平均二乗収束値を意味する。システム (6) から積分記号を省略して τ を改めて t と置いた

$$dx(t)=f(x(t))dt+\sum_{\alpha=1}^{d}\sigma_\alpha(x(t))dw_\alpha(t) \tag{8}$$

を（伊藤型）確率微分方程式という[2]。

本稿で中心的に扱うリャプノフ安定論では，確率微分方程式の解である状態変数 $x(t)$ の汎関数 $v(x(t))\in\mathbb{R}$ のダイナミクスを解析する必要があるが，これは次のように与えられる。

$$dv(x(t),t)=(\mathcal{L}v)(x(t))dt+\sum_{\alpha=1}^{d}(L_{\sigma_\alpha}v)(x(t))dw(t) \tag{9}$$

ここで，

$$(\mathcal{L}v)(x):=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{E}[V(x(t+h))]-V(x(t))}{h} \tag{10}$$
$$=(L_fv)(x)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\sigma_\alpha^T(x)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^T(x)\right]\sigma_\alpha(x) \tag{11}$$

は無限小作用素と呼ばれる。右辺第二項がいわゆる伊藤（修正）項であり，常微分方程式の理論体系からは出てこない項である。

[1] ウィーナー過程の厳密な定義は確率過程論の基礎知識を必要とするので割愛するが，必要であれば専門書（例えば [12,20,40]）を参照されたい。なお，これら数学の専門書では「ブラウン運動（Brownian motion）」と呼称されていることが多いが，一般には物理現象としてのブラウン運動を理想化したものがウィーナー過程であるため，物理学的には両者は異なる [43,44]。本稿では読者層が多岐にわたる（と期待している）ので，無用の混乱を避けるため数学的存在である「ウィーナー過程（Wiener process）」で呼称を統一する。

[2] 確率微分方程式を定義するためにわざわざ積分方程式を経由したのは，ウィーナー過程の導関数 $\dot{w}$ が定義できないためである（超関数の意味では定義できるが [48]，現段階では数学的に高度な解説が必要となることと，常微分方程式との区別がつかなくなると汎関数のダイナミクス解析に混乱を来たす恐れがあるため本稿では採用していない)。これはそもそもウィーナー過程が非有界変動性を持つからであり，(7) 式がリーマン・スティルチェス積分として定義できない理由でもある。伊藤積分では平均二乗収束性を用いて積分の定義不能性を回避しているが，しかしリーマン・スティルチェス積分では満たされる「リーマン和の取り方に依らず収束値が不変」という性質は回復しない。このことは，ストラトノビッチ積分 [36] やウォン・ザカイ修正項 [37] など確率解析に特有の結果を導くが，これらに基づくシステムの非一意性は既に拙著 [46] で述べているので参照されたい。

3.　いろいろな確率安定性

本章では基本的な確率リャプノフ安定論を紹介し，確定システムのリャプノフ安定論との違いを検証する。

3.1　確定システムのリャプノフ安定性

まずはベースとなる確定システムにおけるリャプノフ安定論を簡単に見ていく。システム

$$\dot{x}=f(x(t)),\ x\in\mathbb{R}^n,\ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \tag{12}$$

の原点（$x=0$）が孤立平衡点であるとすると，この原点の安定性は次のように定義される：

(1) 全ての $\varepsilon>0$ および $t>0$ に対して $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在し，$|x(0)|<\delta$ のとき $|x(t)|<\varepsilon$ となるならば，リャプノフ安定であるという。
(2) リャプノフ安定であり，かつ $|x(0)|<\delta$ のとき $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ となるならば，局所漸近安定であるという。
(3) リャプノフ安定であり，かつすべての $x(0)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ となるならば，大域漸近安定であるという。

上記の安定性に対する安定定理の代表的なものは次の通りである。

【定理 1】　システム (12) の原点は，原点を含むある部分空間 $D\subset\mathbb{R}^n$ において正定プロパーな C^1 級関数 $V:D\to\mathbb{R}$ が存在して $(L_fV)(0)=0$ となり，

(1) D 上で $(L_fV)(x)\leq 0$ となるならば，リャプノフ安定である。
(2) D 上の原点以外で $(L_fV)\ (x)<0$ となるならば，局所漸近安定である。
(3) $D=\mathbb{R}^n$ として前項までの全てが成り立つならば，大域漸近安定である。 ♦

以降では上記の安定定理との比較検討を進める。

3.2　確率安定性

確率システム安定論の黎明期には，確定システムのリャプノフ安定論をベースとして様々な安定性が提案された [19]。次の定義は，Khasminskii[15] による。

【定義 1】（確率安定）　確率システム (8) の原点は，

(1) 全ての $\varepsilon>0$ および $t>0$ に対して

$$\lim_{x(0)\to 0}\mathbb{P}\left[\sup_{t>0}|x(t)|>\varepsilon\right]=0 \tag{13}$$

となるならば，確率安定であるという。

(2) 確率安定であり

$$\lim_{x(0)\to 0}\mathbb{P}\left[\lim_{t\to\infty}x(t)=0\right]=1 \tag{14}$$

となるならば，局所確率漸近安定[1]であるという。

(3) 確率安定であり，かつすべての $x(0)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\mathbb{P}[\lim_{t\to\infty}x(t)=0]=1$ となるならば，大域確率漸近安定[2]であるという。

上記は確定システムの安定性に確率演算を加えて拡張したものである。また，以下で示すように安定性の十分条件にも相似性が認められるため，現代においても定義 1 をベースに安定性解析が行われることが多い。

【定理 2】　システム (8) の原点は，原点を含むある部分空間 $D\subset\mathbb{R}^n$ において正定プロパーな C^2 級関数 $V:D\to\mathbb{R}$ が存在して $(\mathcal{L}V)(0)=0$ となり，

(1) D 上で $(\mathcal{L}V)(x)\leq 0$ となるならば，確率安定である。
(2) D 上の原点以外で $(\mathcal{L}V)(x)<0$ となるならば，局所確率漸近安定である。
(3) $D=\mathbb{R}^n$ として前項までの全てが成り立つならば，大域確率漸近安定である。 ♦

大域確率漸近安定性は 100%の収束性を保証するが，局所確率漸近安定性では保証されない。具体的な確率を計算したい場合（例えば，収束する確率が 70%以上であることを保証したい場合）には Kushner の定義 [17] が有効であり，これは Satoh[35] により活用されている[3]。

3.3　一様概安定性

前節で述べた安定性は，確定システムの安定性に確率演算を加えたものであるため自然な定義といえる。しかし，確定システムの安定性との繋がりを考えると「どのようなときに確定システムの安定性と確率 1 で等しくなるのか」を考えておきたい。つまり，リャプノフ安定・局所漸近安定・大域漸近安定の全ての性質において常に 100%の精度を求める場合に対応しておきたい。

そのような安定性を議論するためには，Bardi and Cesaroni[4] による概可安定性（almost sure stabilizability）が有効である。筆者は彼らの議論を純粋な安定性解析に用いるため，対象システムから制御入力を除外したバージョンを定義した [28]。それは次の通りである。

【定義 2】（一様概安定）　確率システム (8) の原点は，

(1) 全ての $\varepsilon>0$ および $t>0$ に対して $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在し，$|x(0)|<\delta$ のとき確率 1 で $|x(t)|<=\varepsilon$ となるならば，一様概安定であるという。
(2) 一様概安定であり，かつ確率 1 で，$|x(0)|<\delta$ のとき $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ となるならば，局所概漸近安定であるという。
(3) 一様概安定であり，かつすべての $x(0)\in\mathbb{R}^n$ に対し

---

[1] 文献 [15] では asymptotic stability in probability。

[2] 文献 [15] では asymptotic stability in the large。

[3] 確定システムにおける定理 1 には逆定理が存在し，また，ラサールの定理を使って十分条件を緩めることもできる [16]。同様に，確率システムにおける定理 2 の逆定理 [18] やラサールの定理も存在する [17]。ただし，定理 2 の逆定理では関数 $V(x)$ は C^2 級ではなく C^0 級となっている。これは定理 2 が必要十分条件ではないことを意味し，確率リャプノフ安定論の特異性を示す重要な点である。筆者らはこの点について検討しており [31]，そのキーポイントを 5. で説明する。

て確率 1 で $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ となるならば，大域概漸近安定であるという。

この定義は，確定システムの安定性に「確率 1」という要素を加えたものである。しかし，対象となるシステムはホワイトノイズによる拡散項を含むため，安定性の条件は確定システムのそれとは異なる。このことは次の安定定理により明らかとなる。

【定理 3】 システム (8) の原点は，原点を含むある部分空間 $D\subset\mathbb{R}^n$ において正定プロパーな C^2 級関数 $V:D\to\mathbb{R}$ が存在して $(\mathcal{L}V)(0)=0$ となるとともに

$$\forall\alpha=1,2,\dots,d,\ \forall x\in D,\ (L_{\sigma_\alpha}V)(x)=0 \tag{15}$$

がなりたち，

(1) D 上で $(\mathcal{L}V)(x)\le 0$ となるならば，一様概安定である。

(2) D 上の原点以外で $(\mathcal{L}V)(x)<0$ となるならば，局所一様概漸近安定である。

(3) $D=\mathbb{R}^n$ として前項までの全てが成り立つならば，大域一様概漸近安定である。 ♦

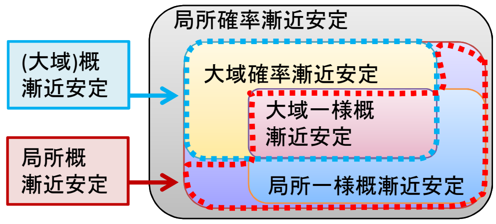
上記では，Bardi and Cesaroni[4] の定義と違い「一様：uniform」という語を追加している[1]。実は，大域確率漸近安定性のことを概漸近安定（almost sure asymptotic stability または同義の asymptotic stability with probability one）と表記する文献も存在するため [9,19,17,22,26]，用語の衝突を避けている。

この用語の衝突は，大域確率漸近安定性と大域一様概漸近安定性がどちらも確率 1 での収束性を担保することに端を発している。しかし，この二つは異なる概念であり，両者の違いは収束の仕方に現れる。システムの原点が大域確率漸近安定であるとき，その解軌道は原点に近づいたり遠ざかったり揺れ動きながら，長時間で観察すれば原点に近づいていき，やがては原点に収束する。そのとき，全状態空間 $\mathbb{R}^n$ のいかなる真部分空間も不変集合となる必要はない（原点のみからなる部分空間を除く）。大域一様概漸近安定の場合も，その解軌道は原点に近づいたり遠ざかったり揺れ動きながら収束していくが，しかしどの時刻においてもその点を境界に含む不変集合が存在する。つまり，大域一様概漸近安定性は，確定システム（時不変システム）の大域漸近安定性と同様，入れ子構造を持った不変集合の存在を要するのである。

なお，(15) 式の条件があることから，入れ子構造を持った不変集合とは関数 $V(x)$ のサブレベル集合である。この点も，確定システムのリャプノフ関数と定理 3 を満たす関数 $V(x)$ との共通点である[2]。

[1] Bardi and Cesaroni[4] の本文中においても uniform という語を使って説明している箇所がある。

[2] 元の文献 [4] では，定理 3 とは異なり関数 $V(x)$ は上半連続となっている。これは彼らが $V(x)$ を確率偏微分方程式の粘性解として特徴付けたかったためである。一様概安定性では入れ子構造を持った不変集合を利用して安定性を証明するため，確定システムの安定論と同様，粘性解に拡張しても安定性解析ができる。しかし，ここでは他の安定性との比較をする都合上，関数 $V(x)$ の無限小作用素が定義できない場合の安定性解析を避け，C^2 級に留めておく。



第 1 図 確率システムにおける漸近安定性の包含関係.

3.4 局所概漸近安定性

前節から，一様概安定性は確定システムの安定性と「確率 1 で等しい」と言えそうである。これは重要な成果であるが，定理 3 の条件 (15) はかなり厳しい。そこで筆者は，不変集合の入れ子構造を緩めて「ある部分空間の内部からは 100%出ていかない」という局所的な漸近安定性を定義した [28]。本節ではこの性質を紹介する。

【定義 3】（局所概漸近安定） 確率システム (8) の原点が確率安定であるとする。原点を含むある部分空間 $D\subset\mathbb{R}^n$ が存在して，全ての $x(0)\in D$ および $t>0$ に対して，確率 1 で $x(t)\in D$ を保ちつつ $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ となるならば，局所概漸近安定であるという。

また，これに対応する安定定理は次の通りである。

【定理 4】 システム (8) の原点は，正定プロパーな C^2 級関数 $V:D\to\mathbb{R}$ が存在して $(\mathcal{L}V)(0)=0$ となり，更に

$$\forall\alpha=1,2,\dots,d,\ \forall x\in\partial D,\ (L_{\sigma_\alpha}V)(x)=0 \tag{16}$$

がなりたち，かつ D 上の原点以外で $(\mathcal{L}V)(x)<0$ となるならば，局所概漸近安定である。 ♦

局所概漸近安定性は，確率 1 での漸近安定性を保証するために大域的性質まで求める確率安定論の使いづらさを解消したいという動機から提案した。不変集合 D が一つ見つかれば，その内部を初期値に持つ解が D に留まりつつ原点に確率 1 で収束する。定理 4 の条件 (16) と定理 3 の条件 (15) との違いは，前者が D 内の全ての x への条件なのに対し，後者は D の境界 ∂D 内の x のみへの条件となっている点である。

また，局所概漸近安定性では D の境界 ∂D を用いることから D は有界集合だが，D を $\mathbb{R}^n$ に限りなく近づけると大域確率漸近安定性と一致する。このことは，大域確率漸近安定性を概漸近安定性と呼称することとも整合性が取れている。また，D の内部が入れ子構造を持った不変集合で隙間なく埋められるなら，局所一様概漸近安定性と一致する。このように，局所概漸近安定性は，確率漸近安定性と一様概漸近安定性の中間に位置する性質である。それらの関係を図 1 に示しておく。

4. 確率リャプノフ安定論の発展

確率漸近安定性は確率システム安定論で最もよく解析される安定性だが，前章で議論したような確率性そのもの以外においても，確定システムの安定性解析と異なる結果を導くことがある。

それは，原点が確率漸近安定であるにも関わらず定理 2 の条件を満たすような関数 $V(x)$ が存在しないケースである。このことは Khasminskii[15] の Remark 5.5 において既に示されているので簡潔に紹介する。

スカラシステム

$$dx(t) = ax(t)dt + cx(t)dw(t),\ a,c \in \mathbb{R} \tag{17}$$

の原点は，$a < c^2/2$ を満たすとき大域確率漸近安定となる。このことは解析解 $x(t) = x(0)\exp\{(a - c^2/2)t + cw(t)\}$ から直ちに証明されるが，リャプノフ指数による安定判別 [15,26] でも証明可能である。しかし，確率リャプノフ安定論で証明しようとすると，定理 2 を満たす関数 $V(x)$ が $V(x) = |x|^{1-2a/c^2}$ となることから，a と c の値によっては原点で C^2 級ではなくなってしまう。

つまり，上記の関数 $V(x)$ は原点において無限小作用素を持たないことがあるため，これまでのように無限小作用素を微分作用素のように扱うだけでは安定性解析ができない。Khasminskii[15] は，システム (8) の原点が平衡点でかつ全ての係数が大域リプシッツであるとき，原点以外から始まる解が原点に有限時間では到達できない（inaccessible）ことを利用して，この特異性をある意味で無視している。しかし，それ以外の場合では安定性の証明には再検討が必要であるため，拙著 [31] ではこの点を主テーマに安定論を展開している。

このテーマは，確率安定性・モーメント安定性・概安定性の関係 [42] にも深く関与していると考えられるため，筆者にとって興味深い。今はまだ理論を詰めている段階であるため，これについてはまたの機会に詳しく説明したい。

5. おわりに

本稿は確率システムシンポジウム（SSS）50 回記念特集号別冊の一部として執筆させて頂いたこともあり，往年の結果と筆者の成果との関わりに比重を置いた解説記事にさせて頂いた。確率システムにおけるリャプノフ安定論の不思議さと面白さをお伝えできていれば幸いである。

謝　辞

本稿を企画して頂いた立命館大学の杉本末雄先生に厚く御礼申し上げます。また，本稿で紹介させて頂いた筆者の研究成果における共著者のみなさまに深く感謝申し上げます。本研究の一部は JSPS 科研費 17H03282 の助成を受けました。

参 考 文 献

[1] L. Arnold, E. Oeljeklaus and E. Pardoux: Almost sure and moment stability for linear stochastic systems, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1186, pp. 129–159 (1986)

[2] L. Arnold: Stabilization by noise revisited, *ZAMM - J. App. Math. Mech.*, Vol. 70, pp. 235–246 (1990)

[3] J. -P. Aubin and G. D. Prato: Stochastic Lyapunov method, *Nonlinear Diff. Eq. Appl.*, Vol. 2, No. 4, 511/525, Birkhäuser Verlag, 1995.

[4] M. Bardi and A. Cesaroni: Almost sure stabilizability of controlled degenerate diffusions, *SIAM J. Contr. Optim.*, Vol. 44, No. 1, pp. 75–98 (2005)

[5] H. Deng, et al: Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 46, No. 6, pp. 1237–1253 (2001)

[6] P. Florchinger: A universal formula for the stabilization of control stochastic differential equations, *Stoch. Anal. Appl*, Vol. 11, No. 2, pp. 155–162 (1993)

[7] P. Florchinger: Lyapunov-like techniques for stochastic stability, *SIAM J. Contr. Optim.*, Vol. 33, No. 4, pp. 1151–1169 (1995)

[8] P. K. Friz and M. Hairer: *A Course on Rough Paths*, Springer International Publishing, Switzerland (2014)

[9] D. J. Higham, X. Mao and C. Yuan: Almost sure and moment exponential stability in the numerical simulation of stochastic differential equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 45, No.2, 592–609 (2007)

[10] K. Hoshino, Y. Nishimura, Y. Yamashita and D. Tsubakino. Global asymptotic stabilization of nonlinear deterministic systems using Wiener processes, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 61, No. 8, pp. 2318–2323 (2016)

[11] K. Hoshino, Y. Nishimura and Y. Yamashita: Convergence rates of stochastic homogeneous systems, *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 124, pp. 33–99 (2019)

[12] N. Ikeda, S. Watanabe: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland (1989)

[13] H. Ito and Y. Nishimura: Stability of stochastic nonlinear systems in cascade with not necessarily unbounded decay rates, *Automatica*, Vol. 62, No. 12, pp. 51–64, 2015.

[14] H. Ito and Y. Nishimura: An iISS framework for stochastic robustness of interconnected nonlinear systems, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 61, No. 7 pp. 1-16 (2016)

[15] R. Z. Khasminskii: *Stochastic Stability of Differential Equations*, Second Edition, Springer (2012)

[16] H. K. Khalil: *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996.

[17] H. J. Kushner: *Stochastic Stability and Control*, Academic Press, New York, 1967.

[18] H. J. Kushner: Converse theorems for stochastic Liapunov functions, *SIAM J. Contr.*, Vol. 5, pp. 228–233 (1967)

[19] F. Kozin: A survey of stability of stochastic systems, *Automatica*, Vol. 5, pp. 95–112 (1969)

[20] H. Kunita: *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, Cambridge University Press (1990)

[21] A. A. Levakov: Stability analysis of stochastic differential equations with the use of Lyapunov functions of constant sign, *Ordinary Differential Equations*, Vol. 47, No. 9, pp. 1271–1280 (2011)

[22] X. Li and X. Mao: A note on almost sure asymptotic stability of neutral stochastic delay differential equations with Markovian switching, *Automatica*, Vol. 48, pp. 2329–2334 (2012)

[23] S. -J. Liu, J. -F. Zhang and Z. -P. Jiang: A notion of stochastic input-to-state stability and its application to stability of cascaded stochastic nonlinear systems, *Acta Math. Appl. Sinica*, English Series, Vol. 24, No. 1, pp. 141–156 (2008)

[24] T. J. Lyons, M.J. Caruana and T. Lévy: *Differential Equations Driven by Rough Paths*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2007)

[25] X. Mao: Stochastic stabilization and destabilization, *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 23, pp. 279–290 (1994)

[26] X. Mao: *Stochastic Differential Equations and Applications (2nd ed.)*, Cambridge: Woodhead Publishing, 2007.

[27] M. D. McDonnell and D. Abbott: What is stochastic resonance? definitions, misconceptions, debates, and its relevance to biology, *PLoS Computational Biology*, Vol. 5, No. 5, e1000348 (2009)

[28] Y. Nishimura: Conditions for local almost sure asymptotic stability, *Syst. Contr. Lett.* Vol. 94, pp. 19–24 (2016)

[29] Y. Nishimura: Stabilization by artificial Wiener processes, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 61, No. 11, pp. 3574–3579 (2016)

[30] Y. Nishimura: Stabilization by unbounded-variation noises, *Int. J. Robust Nonlin.*, Vol. 26, No. 18, pp. 4126–4147 (2016)

[31] Y. Nishimura and H. Ito: Stochastic Lyapunov functions without differentiability at supposed equilibria, *Automatica*, Vol. 92, No. 6, pp. 188–196 (2018)

[32] Y. Nishimura and D. Tsubakino: Local controllability of single-input nonlinear systems based on deterministic Wiener processes, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 65, No. 1, pp. 354–360 (2020)

[33] Y. Nishimura, K. Tanaka, Y. Wakasa and Y. Yamashita. Stochastic asymptotic stabilizers for deterministic input-affine systems based on stochastic control Lyapunov functions, *Trans. Fund. Elec. Com. Com. Sci.*, Vol. E96-A, pp. 1695–1702 (2013)

[34] A. S. Poznyak: Stochastic super-twist sliding mode controller, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 63, No. 5, pp. 1538–1544 (2018)

[35] S. Satoh and M. Saeki: Bounded stability of nonlinear stochastic systems, *SICE J. Contr., Meas. Syst. Integr.*, Vol. 8, No. 2, pp. 181–187 (2015)

[36] R. L. Stratonovich: A new representation of stochastic integrals, *SIAM J. Contr.*, Vol. 4, pp. 362–371 (1966)

[37] E. Wong and M. Zakai: On the relation between ordinary and stochastic differential equations, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 3, pp. 213–229 (1965)

[38] J. Yin, S. Khoo, Z. Man and X. Yu, Finite-time stability and instability of stochastic nonlinear systems, *Automatica*, Vol. 47, No. 12, pp. 2671–2677 (2011)

[39] 東，他：「ランダマイズド制御—ランダム性を活用した新しい制御」特集号，システム/制御/情報，Vol. 60, No. 5 (2016)

[40] 伊藤，他：確率論ハンドブック，丸善出版 (2012)

[41] 上原, 西村，星野：確率システムの有限時間安定性補償器，電子情報通信学会論文誌 A，Vol. J100-A, No. 8, pp. 303–308 (2017)

[42] 砂原善文：確率システム理論，コロナ社 (1979)

[43] 関本謙：ゆらぎのエネルギー論：岩波書店，2006.

[44] 高岡浩一郎：確率微分方程式の基礎，応用数理，Vol. 17, No. 1, pp. 21–28 (2007)

[45] 西村悠樹：確率システムに対するLyapunov安定論，システム/制御/情報，Vol. 55, No. 12, pp. 513–518 (2011)

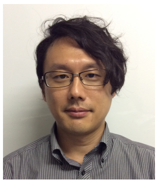
[46] 西村悠樹：ノイズによる安定化—人工ウィーナー過程とその効果に迫る，Vol. 61, No. 9, pp. 375–380 (2017)

[47] 西村，田中，若佐：1次元Wiener過程による確定アファインシステムの概漸近安定化問題，計測自動制御学会論文集，Vol. 49, No. 4，pp. 432–439 (2013)

[48] 飛田武幸：確率論の基礎と発展，共立出版 (2011)

著 者 略 歴

西村悠樹（にしむら ゆうき）(正会員)



2009年3月北海道大学大学院情報科学研究科博士後期課程修了．同年4月山口大学大学院理工学研究科助教．2012年4月鹿児島大学大学院理工学研究科准教授となり現在に至る．非線形制御や確率安定論を中心としたシステム制御理論および応用研究に従事．博士（情報科学）．計測自動制御学会，日本応用数理学会，電子情報通信学会，日本機械学会，IEEE，SIAMなどの会員．